

Introdução à Robótica

Cinemática direta

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

Introdução

- Cinemática
 - Ciência que estuda os movimentos de um corpo abstraindo das forças que os causaram
 - São estudadas a posição, velocidade, aceleração e outras derivadas de mais alta ordem das variáveis de posição

Introdução

- Dinâmica
 - Estuda o relacionamento entre os movimentos e as forças e torques que os causaram
 - No caso de manipuladores
 - Dado o movimento do manipulador, calcular o vetor de torques nas juntas
 - Dado o vetor de torques nas juntas, calcular o movimento resultante do manipulador



Introdução

Cinemática direta vs. Cinemática inversa

- Cinemática direta
 - Calcular a posição do órgão terminal do manipulador em função das variáveis de junta
- Cinemática inversa
 - Calcular os valores das variáveis de junta que produzirão a posição e orientação desejadas para o órgão terminal



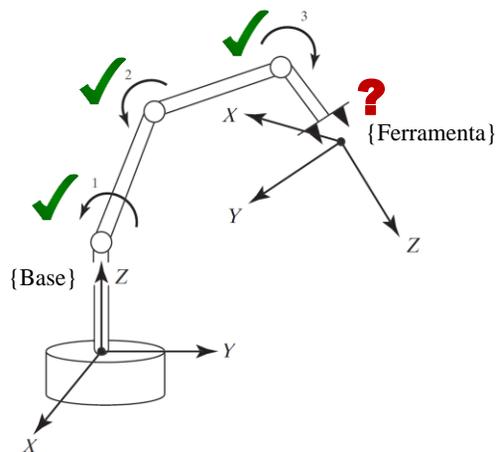
Introdução

Cinemática direta vs. Cinemática inversa



Introdução

Cinemática direta



Definições básicas

- Par cinemático
 - Formado por dois elos ligados por uma junta
- Elemento de um par cinemático
 - Cada uma das superfícies de um par cinemático
- Conexão ou acoplamento
 - Ligação de pares cinemáticos em série ou em paralelo



Definições básicas

- Cadeia cinemática
 - Conjunto de corpos rígidos (elos) conectados entre si por juntas
- Cadeia aberta
 - Uma junta conectando membros consecutivos
- Cadeia fechada
 - Mais juntas conectando membros consecutivos



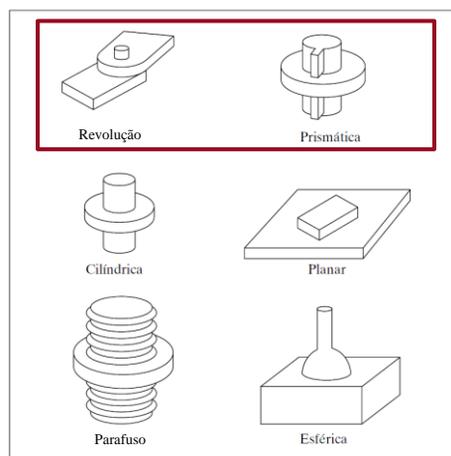
Definições básicas

- Pares cinemáticos
 - Par menor: utilizado para descrever a conexão entre um par de corpos, quando o movimento relativo é caracterizado por duas superfícies que deslizam sobre si
- *Linkage*
 - Mecanismo onde todas as juntas são pares menores



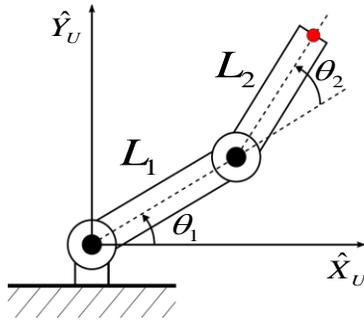
Definições básicas

Juntas de um par menor



Cinemática direta

Solução geométrica



$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$



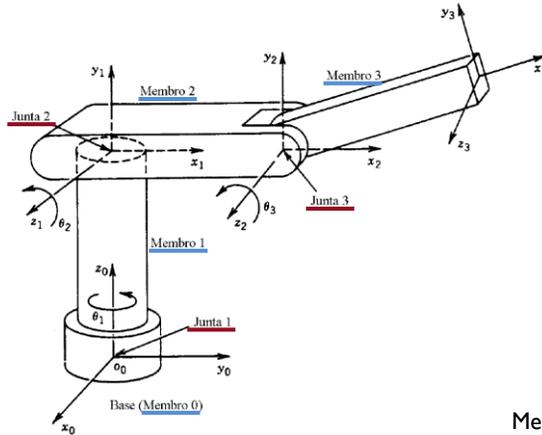
Definições básicas

- Manipuladores
 - Sempre modelado por juntas com 1 DoF
- Numeração dos elos
 - A partir da base (Elo 0), o primeiro corpo móvel é denominado Elo 1, e assim sucessivamente até o fim do braço (Elo n)



Definições básicas

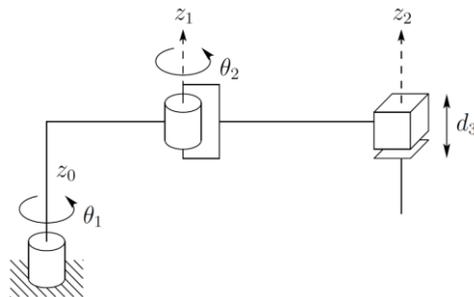
Numeração dos elos



Definições básicas

- Manipulador possui n juntas e $n + 1$ elos
- Variáveis de junta (q_i)

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{se } i \text{ for de revolução} \\ d_i & \text{se } i \text{ for prismática} \end{cases}$$

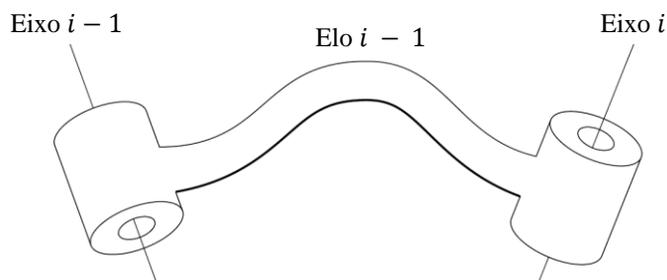


Descrição dos elos

- Eixo de uma junta
 - Definido por uma linha no espaço 3D, ou por um vetor direcional
 - O eixo da junta i é o eixo no espaço em torno do qual o elo i gira em relação ao elo $i - 1$



Descrição dos elos



Descrição dos elos

- Um elo pode ser descrito por dois valores
 - Comprimento do elo (a)
 - Torção do elo (α)
- Localização relativa de dois eixos no espaço



Descrição dos elos

- Comprimento do elo (a_{i-1})
 - Medida do comprimento da reta perpendicular que liga os dois eixos
 - Essa perpendicular sempre existe e é única
 - No caso de eixos paralelos, existirão infinitas retas perpendiculares de mesmo comprimento

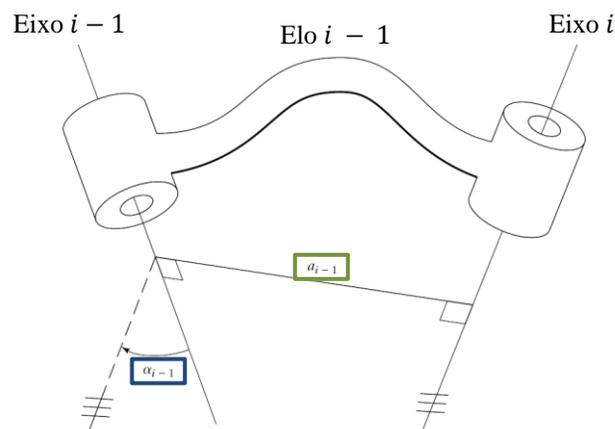


Descrição dos elos

- Torção do elo (α_{i-1})
 - Dado um plano normal à reta perpendicular, e que contém o eixo $i - 1$, projeta-se a imagem do eixo i . O ângulo medido a partir de $i - 1$ até a projeção de i é torção α_{i-1} .



Descrição dos elos



Descrição da conexão entre elos

Elos intermediários na cadeia cinemática

- Envolve vários aspectos
 - Resistência, lubrificação, montagem, etc
 - Pode-se abstrair desses detalhes na cinemática
- A interconexão é descrita por dois valores
 - *Offset* do elo (d)
 - Ângulo de junta (θ)
- Elos vizinhos possuem um eixo em comum



Descrição da conexão entre elos

Elos intermediários na cadeia cinemática

- *Offset* do elo (d_i)
 - Descreve a distância (com sinal), sobre o eixo i , entre as duas perpendiculares dos elos
 - Variável de junta para juntas prismáticas ←



Descrição da conexão entre elos

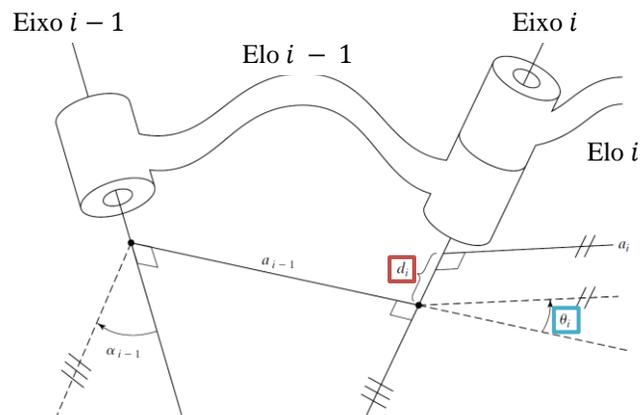
Elos intermediários na cadeia cinemática

- Ângulo de junta (θ_i)
 - Descreve a rotação relativa entre os elos
 - Variável de junta para juntas de revolução ←



Descrição da conexão entre elos

Elos intermediários na cadeia cinemática



Descrição da conexão entre elos

Primeiro e último elos na cadeia cinemática

- Comprimento (a_i) e torção (α_i), dependem dos eixos i e $i + 1$. Logo $[a_1, \dots, a_{n-1}]$ e $[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$ são calculados como visto
- No início e fim da cadeia, os valores são zero

$$a_0 = a_n = 0$$

$$\alpha_0 = \alpha_n = 0$$



Descrição da conexão entre elos

Primeiro e último elos na cadeia cinemática

- *Offset* do elo (d_i) e ângulo de junta (θ_i), são bem definidos para $i = [2, \dots, n - 1]$
- Se as juntas $i = \{1, n\}$ forem de revolução
 - $d_i = 0$ e θ_i é escolhido arbitrariamente
- Se as juntas $i = \{1, n\}$ forem prismáticas
 - $\theta_i = 0$ e d_i é escolhido arbitrariamente



Notação de Denavit-Hartenberg

- Descrever um robô, cinematicamente, através desses quatro parâmetros
 - Dois descrevem os elos (a_i e α_i)
 - Dois descrevem as conexões (d_i e θ_i)
- Parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH)



Notação de Denavit-Hartenberg

Afixando referenciais aos elos

- Convenção
 - Os referenciais são denominados de acordo com o número do elo que está fixado
 - Logo, o referencial $\{i\}$ está afixado ao elo i



Notação de Denavit-Hartenberg

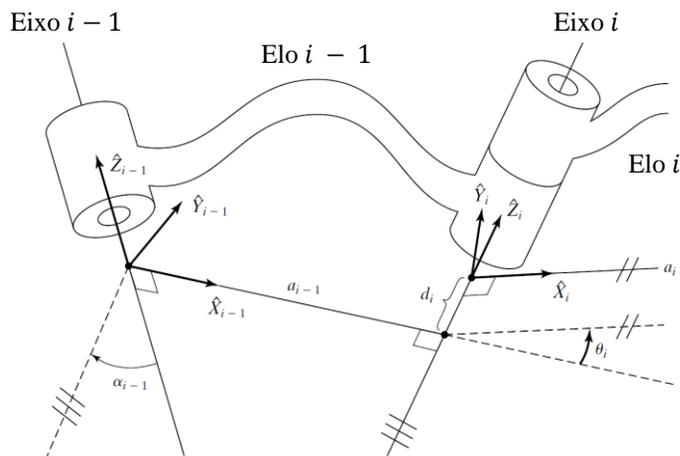
Afixando referenciais aos elos

- Elos intermediários na cadeia
 - O eixo \hat{Z}_i é coincidente com o eixo i
 - A origem de $\{i\}$ é fixada onde a perpendicular comum (a_i) entre os eixos intercepta o eixo i
 - O eixo \hat{X}_i possui a direção de a_i e aponta no sentido da junta i para a junta $i + 1$
 - O eixo \hat{Y}_i é definido pela regra da mão direita



Notação de Denavit-Hartenberg

Afixando referenciais aos elos



Notação de Denavit-Hartenberg

Afixando referenciais aos elos

- Primeiro elo
 - Um referencial é afixado à base do robô
 - Referencial $\{0\}$ (Elo 0)
 - Esse referencial não é móvel
 - Considerado o referencial padrão
 - Para facilitar, posicionar \hat{Z}_0 com mesma direção de \hat{Z}_1 , de forma que $\{0\}$ e $\{1\}$ são coincidentes quando a variável da Junta 1 for zero



Notação de Denavit-Hartenberg

Afixando referenciais aos elos

- Último elo
 - Junta n prismática
 - Direção de \hat{X}_n definida de forma que $\theta_n = 0$
 - Origem de $\{N\}$ definida na interseção de \hat{X}_{n-1} e a junta n quando $d_n = 0$
 - Junta n de revolução
 - Direção de \hat{X}_n alinhada com \hat{X}_{n-1} quando $\theta_n = 0$
 - Origem de $\{N\}$ de forma que $d_n = 0$



Notação de Denavit-Hartenberg

Afixando referenciais aos elos

- **Resumo dos parâmetros de elos (DH)**
 - a_i : distância entre \hat{Z}_i e \hat{Z}_{i+1} , ao longo de \hat{X}_i
 - α_i : ângulo entre \hat{Z}_i e \hat{Z}_{i+1} , em torno de \hat{X}_i
 - d_i : distância entre \hat{X}_{i-1} e \hat{X}_i , ao longo de \hat{Z}_i
 - θ_i : ângulo entre \hat{X}_{i-1} e \hat{X}_i , em torno de \hat{Z}_i
- Define-se $a_i > 0$ (distância), e α_i , d_i e θ_i são valores com sinal



Notação de Denavit-Hartenberg

Afixando referenciais aos elos

Parâmetro	Símbolo	Junta de Revolução	Junta Prismática
Comprimento do elo	$a_i (l_i)$	Fixo	Fixo
Torção do elo	α_i	Fixo	Fixo
Offset do elo	d_i	Fixo	Variável
Ângulo da junta	θ_i	Variável	Fixo

*Verificar no RoboAnalyzer.



Notação de Denavit-Hartenberg

Afixando referenciais aos elos – Procedimento (Resumo)

1. Identificar os eixos das juntas e imaginar retas infinitas alinhadas com eles. Nos passos 2 a 5, considere duas retas como estas passando pelos eixos i e $i + 1$
2. Identificar a perpendicular ou ponto de intersecção comum aos dois eixos. Afixe a origem do referencial do elo no ponto de intersecção dos eixos ou onde a perpendicular comum entre eles interceptar o eixo i
3. Assinalar o eixo \hat{Z}_i colinear com o eixo da junta i



Notação de Denavit-Hartenberg

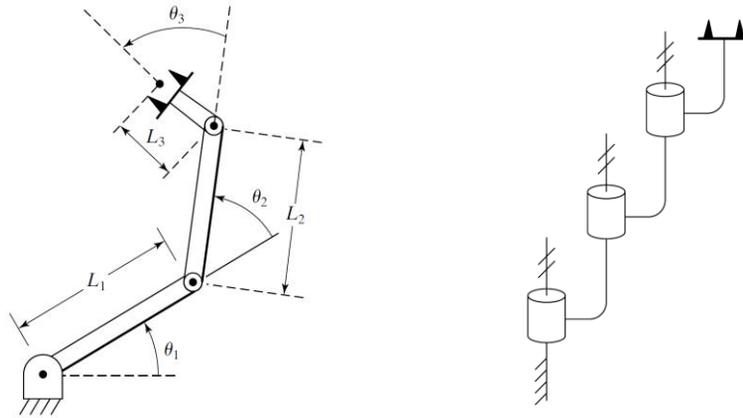
Afixando referenciais aos elos – Procedimento (Resumo)

4. Assinalar o eixo \hat{X}_i colinear com a perpendicular comum, se os eixos se interceptarem, assinalar \hat{X}_i de forma a ser normal ao plano que contém os dois eixos
5. Assinalar o eixo \hat{Y}_i de forma a completar o referencial segundo a “regra da mão direita”
6. Assinalar $\{0\}$ coincidente com $\{1\}$ quando a variável da junta 0 for zero. Escolher para $\{N\}$ a localização de sua origem e escolha \hat{X}_N livremente, mas de forma a fazer com que a maioria dos parâmetros de elo sejam zero



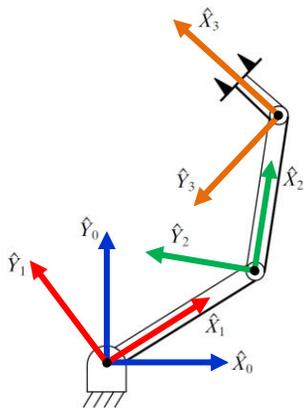
Notação de Denavit-Hartenberg

Exemplo



Notação de Denavit-Hartenberg

Exemplo



Elo

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3



Cinemática de manipuladores

Modelo cinemático

- Objetivo é derivar a forma geral da transformação que relaciona os referenciais afixados em elos adjacentes
- Posteriormente, essas transformações individuais serão concatenadas para calcular a posição e orientação do elo n em relação ao elo 0



Cinemática de manipuladores

Derivando as transformações de elos

- Transformação que define o referencial $\{i\}$ em relação ao referencial $\{i - 1\}$ (${}^{i-1}_i T$)
- No caso geral essa transformação será função dos quatro parâmetros de elos
- Para qualquer robô, essa transformação será função de apenas uma variável, sendo que os outros parâmetros serão fixos e determinados pelo projeto mecânico



Cinemática de manipuladores

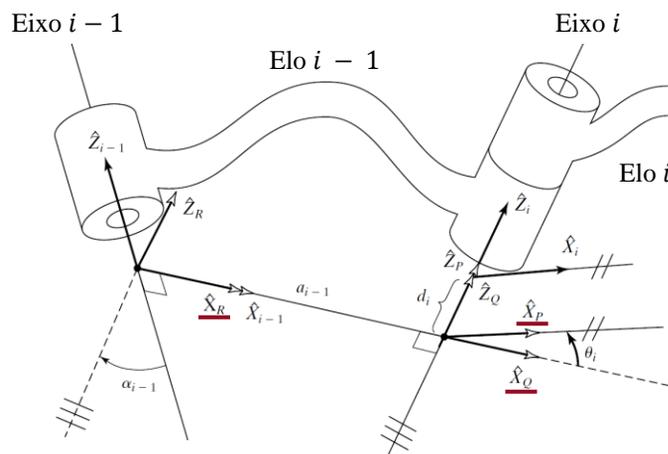
Derivando as transformações de elos

- Referenciais intermediários: $\{P\}$, $\{Q\}$ e $\{R\}$
 - $\{R\}$ difere de $\{i - 1\}$ de uma rotação α_{i-1}
 - $\{Q\}$ difere de $\{R\}$ de uma translação a_{i-1}
 - $\{P\}$ difere de $\{Q\}$ de uma rotação θ_i
 - $\{i\}$ difere de $\{P\}$ de uma translação d_i



Cinemática de manipuladores

Derivando as transformações de elos



Cinemática de manipuladores

Derivando as transformações de elos

- Para transformar a descrição de um vetor no referencial $\{i\}$ para o referencial $\{i - 1\}$

$${}^{i-1}P = \underbrace{{}^{i-1}T_R R_Q T_P^Q T^P}_{{}^{i-1}T_i} P \quad \rightarrow \quad {}^{i-1}P = {}^{i-1}T_i P$$



Cinemática de manipuladores

Derivando as transformações de elos

- A equação anterior pode ser reescrita como

$${}^{i-1}T = R_X(\alpha_{i-1})D_X(a_{i-1})R_Z(\theta_i)D_Z(d_i)$$

- ou

$${}^{i-1}T = \text{Screw}_X(\alpha_{i-1}, a_{i-1})\text{Screw}_Z(\theta_i, d_i)$$

- onde a notação $\text{Screw}_Q(r, \phi)$ significa uma translação de um valor r , e uma rotação de valor ϕ , considerando um eixo \hat{Q}



Cinemática de manipuladores

Derivando as transformações de elos

- Multiplicando-se as transformações

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cinemática de manipuladores

- Definidos os referenciais e os parâmetros de elos, obter as equações cinemáticas é direto
- Transformação do referencial $\{N\}$ para o $\{0\}$

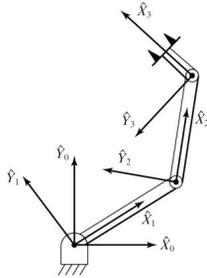
$${}^0T_N = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \dots {}^{N-1}T_N$$

- A transformação 0T_N será uma função de todas as n variáveis de juntas



Cinemática de manipuladores

Exemplo



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Espaços de representação

Atuadores, juntas e cartesiano

- Posição dos elos de um manipulador com n DoF é especificada por n variáveis de junta
- Vetor de juntas ($n \times 1$)
 - Conjunto das variáveis de juntas
- Espaço de junta
 - Espaço definido por todos os vetores de juntas



Espaços de representação

Atuadores, juntas e cartesiano

- Espaço cartesiano
 - Termo utilizado quando a posição é especificada segundo os eixos ortogonais e a rotação é especificada segundo as convenções vistas
- Orientado-a-tarefa ou Operacional



Espaços de representação

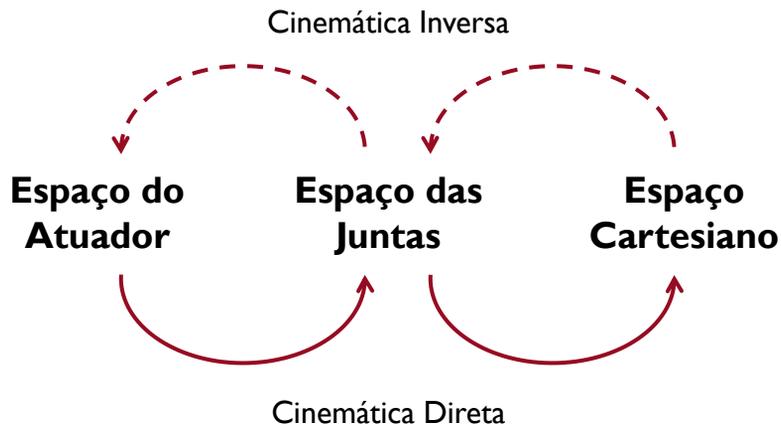
Atuadores, juntas e cartesiano

- Junta não é atuada diretamente
- Vetor atuador
 - Conjunto de variáveis de atuadores, utilizadas para descrever o vetor de juntas. Sensores de posição geralmente localizados nos atuadores
- Espaço do atuador
 - Espaço definido por todos vetores atuadores



Espaços de representação

Atuadores, juntas e cartesiano



Cinemática direta

Considerações computacionais

- Ponto fixo ou Ponto flutuante
 - Ponto fixo é mais rápido, porém deve-se atentar para problemas de precisão
 - Ponto flutuante gasta mais ciclos, porém facilita o desenvolvimento dos programas



Cinemática direta

Considerações computacionais

- Fatoração de equações
 - Reduzir o número de multiplicações e adições
 - Utilização de variáveis locais
 - Métodos de fatoração automatizados
- Funções transcendentais (trigonométricas)
 - Utilizar *look-up tables*

