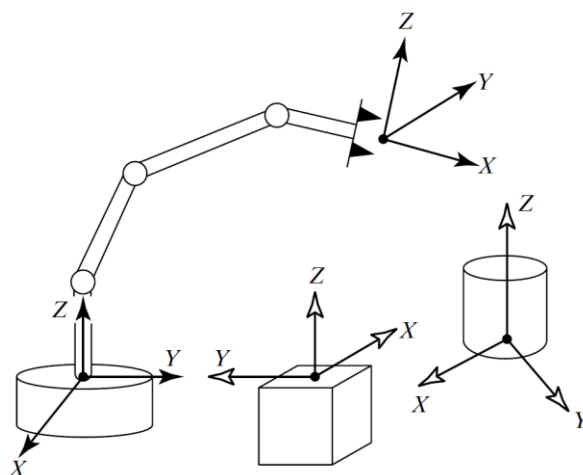


Introdução à Robótica

Descrição espacial e Transformações (2/2)

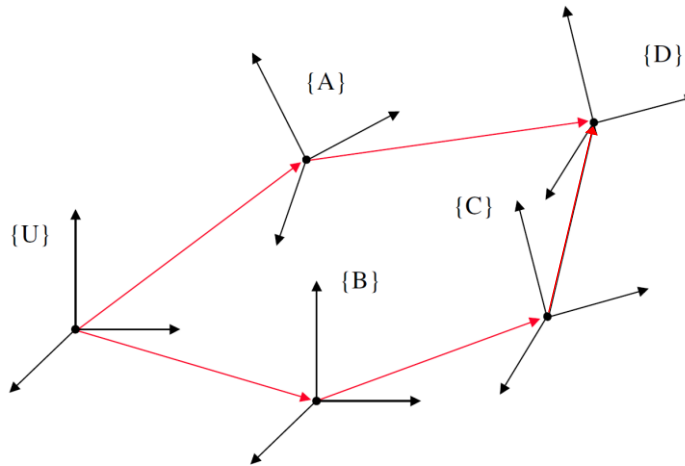
Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

Introdução



Representação

Equações de transformação



Representação

Equações de transformação

- O referencial {D} pode ser obtido como

$${}^U_D T = {}^U_A T {}^A_D T \quad \text{ou} \quad {}^U_D T = {}^U_B T {}^B_C T {}^C_D T$$

- Equação de transformação

$${}^U_A T {}^A_D T = {}^U_B T {}^B_C T {}^C_D T$$



Representação

Equações de transformação

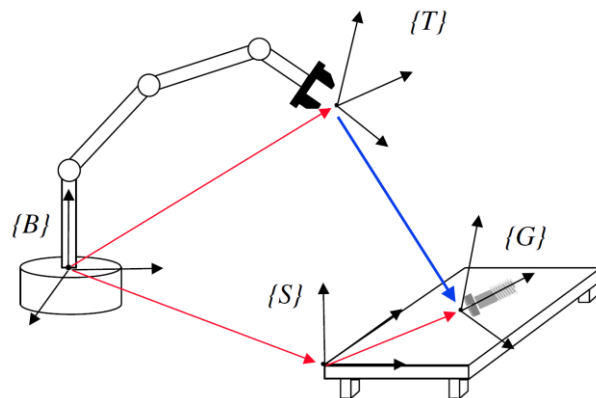
- Utilizadas para resolver transformações no caso de n equações de transformações, e n transformações desconhecidas
- No caso anterior, se ${}^B_C T$ fosse desconhecido

$${}^B_C T = {}^U_B T^{-1} {}^U_A T {}^A_D T {}^C_D T^{-1}$$



Representação

Equações de transformação



Operadores

- As mesmas formas matemáticas para mapear pontos entre referenciais, também podem ser interpretadas como operadores
- Translação, Rotação, Ambos



Operadores

Translacional

- Move um ponto no espaço ao longo da direção de um vetor por uma distância finita
- Características
 - Apenas um sistema de coordenadas envolvido
 - Mesma formulação do mapeamento
 - Interpretações
 - O vetor se move “para frente”
 - O referencial se move “para trás”



Operadores

Translacional

- O vetor ${}^A P_1$ é transladado por um vetor ${}^A Q$

$${}^A P_2 = {}^A P_1 + {}^A Q$$

- Na forma de um operador matricial

$${}^A P_2 = D_Q(q) {}^A P_1$$

- onde

- q : Magnitude (com sinal) da translação
- $\hat{Q}$: Direção do eixo que ocorre a translação



Operadores

Translacional

- O operador D_Q pode ser interpretado como uma transformação homogênea simples

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

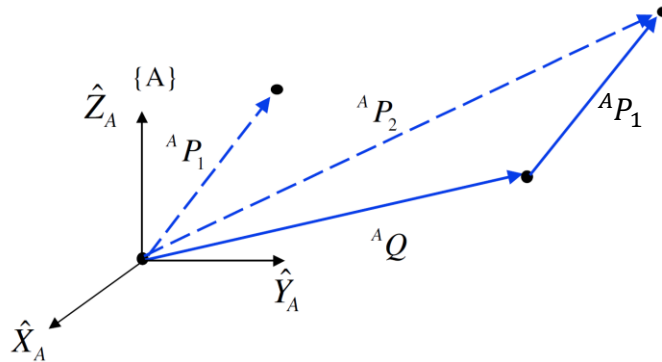
- onde q_x, q_y e q_z são as componentes de Q e

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$



Operadores

Translacional



Operadores

Rotacional

- Muda um vetor ${}^A P_1$ por uma rotação R

$${}^A P_2 = R {}^A P_1$$

- Não está relacionando dois referenciais
 - Por isso não utiliza subscrito ou sobrescrito



Operadores

Rotacional

- Na forma de um operador matricial

$${}^A P_2 = R_K(\theta) {}^A P_1$$

- Onde
 - θ : Valor em graus da rotação
 - $\hat{K}$: Direção do eixo de rotação



Operadores

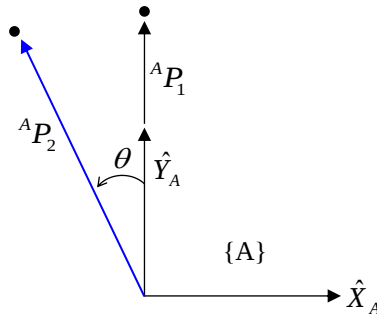
Rotacional

- A matriz que rotaciona um vetor por meio de alguma rotação R , é equivalente à matriz de rotação que descreve um referencial rotacionado de R relativo a um referencial de referência



Operadores

Rotacional



Operadores

Transformação

- Interpretação diferente de referenciais
 - Vetores de posição e matrizes de rotação
- Transformação = Rotação + Translação
- Apenas um sistema de coordenadas
 - Sem subscrito ou sobrescrito

$${}^A P_2 = T {}^A P_1$$



Operadores

Transformação

- A transformação que rotaciona de R e translada de Q é equivalente à transformação que descreve um referencial rotacionado de R e transladado de Q em relação ao referencial de referência



Operadores

Transformação (Exemplo)

- Deseja-se rotacionar o vetor ${}^A P_1$ de $\theta = 30^\circ$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladá-lo 10 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 5 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Determine T e ${}^A P_2$.

$${}^A P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

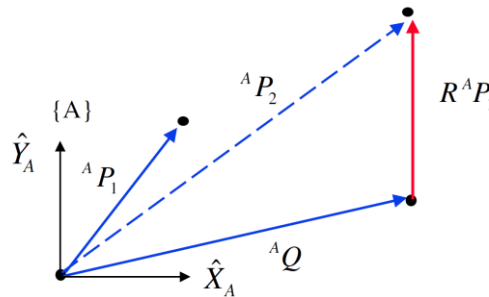
$$T = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 10,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & 5,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A P_2 = T {}^A P_1 = \begin{bmatrix} 9,098 \\ 12,562 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$



Operadores

Transformação (Exemplo)



Resumo das interpretações

Transformação homogênea

- Descrição de um referencial
 - A transformação ${}^A_B T$ descreve o referencial $\{B\}$ em relação ao referencial $\{A\}$. Especificamente, as colunas de ${}^A_B R$ são vetores unitários que definem as direções dos eixos principais de $\{B\}$, e ${}^A P_{BORG}$ localiza a posição da origem de $\{B\}$.



Resumo das interpretações

Transformação homogênea

- Mapeamento
 - A transformação ${}^A_B T$ mapeia ${}^B P \rightarrow {}^A P$
- Operador
 - A transformação T opera em ${}^A P_1$ produzindo ${}^A P_2$



Representações de orientação

- Translações são fáceis de visualizar
- Rotações não são tão intuitivas
 - Difíceis de descrever e especificar
 - Fechada sobre a multiplicação

$${}^A_C R = {}^A_B R {}^B_C R$$

- Não é comutativa

$${}^A_B R {}^B_C R \neq {}^B_C R {}^A_B R$$



Representações de orientação

- Considere duas rotações de $\theta = 30^\circ$, uma em torno de $\hat{Z}_A$ e outra em torno de $\hat{X}_A$.

$$R_z(30) = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$$R_x(30) = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,866 & -0,500 \\ 0,000 & 0,500 & 0,866 \end{bmatrix}$$

$$R_z(30)R_x(30) = \begin{bmatrix} 0,87 & -0,43 & 0,25 \\ 0,50 & 0,75 & -0,43 \\ 0,00 & 0,50 & 0,87 \end{bmatrix}$$

$$R_x(30)R_z(30) = \begin{bmatrix} 0,87 & -0,50 & 0,00 \\ 0,43 & 0,75 & -0,50 \\ 0,25 & 0,43 & 0,87 \end{bmatrix}$$



Representações de orientação

- Matriz de rotação 3x3
 - Colunas mutuamente ortogonais
 - Colunas com magnitude 1 (vetor unitário)

$${}^A_R_B {}^A_R_B^T = 1$$

- Matriz ortonormal própria (determinante=1)
- É possível representar uma rotação em 3D utilizando menos que 9 parâmetros?



Representações de orientação

- Fórmula de Cayley
 - Dada uma matriz ortonormal própria R , existe uma matriz S (*skew-symmetric*), tal que:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S)$$

- Matriz *skew-symmetric*

$$S = -S^T$$



Representações de orientação

- Uma matriz *skew-symmetric* de dimensão 3 é especificada por 3 parâmetros (s_x, s_y, s_z)

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$



- Qualquer matriz de rotação 3x3 poderá ser especificada por apenas 3 parâmetros!



Representações de orientação

- Os nove elementos de uma matriz rotacional não são todos independentes

$$R = [\hat{X} \ \hat{Y} \ \hat{Z}]$$

- É possível representá-los como:

$$|\hat{X}| = 1$$

$$\hat{X} \cdot \hat{Y} = 0$$

$$|\hat{Y}| = 1$$

$$\hat{X} \cdot \hat{Z} = 0$$

$$|\hat{Z}| = 1$$

$$\hat{Y} \cdot \hat{Z} = 0$$



Representações de orientação

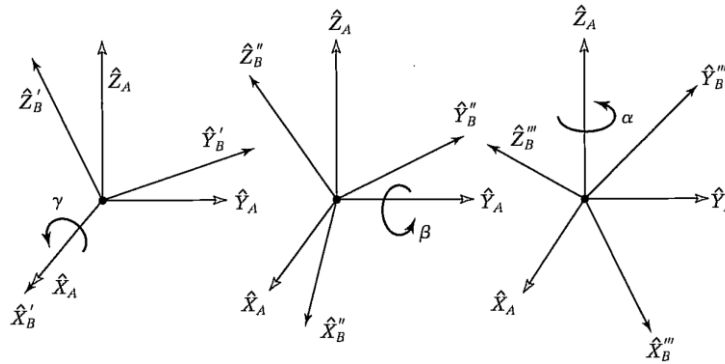
Ângulos fixos X-Y-Z

- Descrição
 - Iniciar com o referencial $\{B\}$ coincidente com um referencial conhecido $\{A\}$. Primeiramente, rotacione $\{B\}$ em torno de $\hat{X}_A$ de um ângulo γ , em seguida em torno de $\hat{Y}_A$ de um ângulo β , e finalmente em torno de $\hat{Z}_A$ de um ângulo α .



Representações de orientação

Ângulos fixos X-Y-Z



Representações de orientação

Ângulos fixos X-Y-Z

- Também conhecido por *roll*, *pitch* e *yaw*
 - Muito utilizado em aviação, náutica e robótica



Representações de orientação

Ângulos fixos X-Y-Z

- Rotação de γ em torno de $\hat{X}_A$ (*roll*)
 - Projeção da descrição dos vetores unitários que representam $\{B\}$ nos vetores unitários de $\{A\}$

$${}^A_B R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} \hat{X}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{X}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Y}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Z}_B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$



Representações de orientação

Ângulos fixos X-Y-Z

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$



Representações de orientação

Ângulos fixos X-Y-Z

■ Problema inverso

- Como obter os ângulos a partir da matriz?

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2})$$

$$\alpha = \text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{c\beta}, \frac{r_{11}}{c\beta}\right)$$

$$\gamma = \text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{c\beta}, \frac{r_{33}}{c\beta}\right)$$

$$\cos \beta = \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}$$



Representações de orientação

Ângulos fixos X-Y-Z

■ Problema inverso – Casos Especiais

$$\beta = 90^\circ$$

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = \text{atan2}(r_{12}, r_{22})$$

$$\beta = -90^\circ$$

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = \text{atan2}(r_{12}, r_{22})$$



Representações de orientação

Ângulos fixos X-Y-Z

- $\text{atan2}(y, x)$
 - Similar a $\tan^{-1}(y/x)$, porém utiliza o sinal de x e y para determinar o quadrante que contém o ângulo resultante
 - Exemplo:

$$\text{atan2}(-2, -2) = -135^\circ$$

$$\text{atan2}(2, 2) = 45^\circ$$



Representações de orientação

Outras descrições

- Ângulos de Euler Z-Y-X
 - Cada rotação é realizada sobre o eixo de $\{B\}$
 - Referencial móvel, depende das rotações
- Ângulos de Euler Z-Y-Z
 - Produzem o mesmo resultado na ordem oposta
- Ângulo-Eixo equivalente
 - Rotação em torno de um eixo genérico (vetor)



Considerações computacionais

- Considere as seguintes rotações sobre ${}^D P$:

$${}^A P = {}^A R_B {}^B R_C {}^C R_D {}^D P$$

- Qual a forma mais eficiente de realizá-las?
 - Existe diferença?
 - A ordem das transformações podem fazer grande diferença no tempo computacional!



Considerações computacionais

- Uma opção é agrupar em uma única matriz

$${}^A R_D = {}^A R_B {}^B R_C {}^C R_D \quad \Rightarrow \quad {}^A P = {}^A R_D {}^D P$$

- O cálculo de ${}^A R_D$ requer
 - 54 multiplicações e 36 adições
- A operação final sobre ${}^D P$
 - 9 multiplicações e 6 adições



Considerações computacionais

- E se as operações forem realizadas na ordem?

$${}^A P = {}^A R_B {}^B R_C {}^C R_D {}^D P$$

$${}^A P = {}^A R_B {}^B R_C {}^C P$$

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P$$

$${}^A P = {}^A P$$

- Total de operações
 - 27 multiplicações e 18 adições



Considerações computacionais

- Cada caso é um caso!
- Se as relações entre as matrizes de rotação forem constantes e existir uma grande quantidade de ${}^D P_i$ que devem ser transformados em ${}^A P_i$
 - Será mais eficiente pré-calcular ${}^A R_D$

