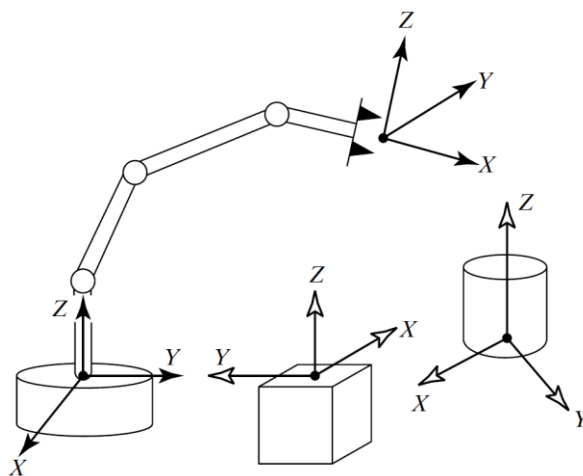


Introdução à Robótica

Descrição espacial e Transformações (1/2)

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

Introdução



Introdução

- Posições e Orientações
 - Partes, ferramenta e do próprio manipulador
- É necessário adotar uma convenção geral
- Sistema de coordenadas geral
 - E os sistemas de coordenadas locais?



Introdução

Objetivos

- Descrever corpos rígidos no espaço 3D
- Formulação matemática consistente
- Sistema de coordenadas universal
 - Transformações entre os referenciais



Introdução

Corpo rígido

- Entidade física
 - Forma e dimensões (tamanho) não se alteram
 - Distâncias relativas das partículas não se alteram
- De maneira geral (na prática)
 - Movimentos e deformações intrínsecas são desprezíveis comparado ao movimento total



Introdução

Notação

- Vetores e Matrizes
 - Letra Maiúscula
- Escalares
 - Letra Minúscula
- Referenciais
 - Sobrescrito e Subscrito precedentes



Representação

- Descrição de posição
- Descrição de orientação
- Descrição de sistema de referência



Representação

Descrição de posição

- Um vetor localiza um ponto no espaço 3D
- O vetor deve conter informações sobre qual sistema de coordenadas ele está definido

$${}^A P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$



Representação

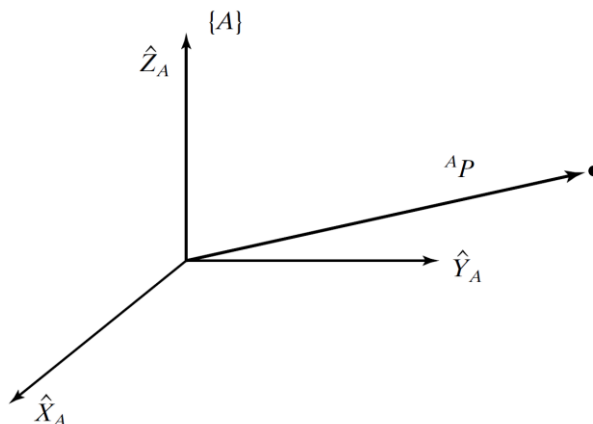
Descrição de posição

- Um sistema de coordenadas é representado por uma letra maiúscula entre chaves, ex. {A}
- Vetores unitários que indicam as principais direções do sistema de coordenadas usam a notação “chapeu” (^)
 - Eixos principais



Representação

Descrição de posição



$$\hat{X}_A \times \hat{Y}_A = \hat{Z}_A$$

$$\hat{Y}_A \times \hat{Z}_A = \hat{X}_A$$

$$\hat{Z}_A \times \hat{X}_A = \hat{Y}_A$$

$$\hat{X}_A \cdot \hat{X}_A = \|\hat{X}_A\| = 1$$

$$\hat{X}_A \cdot \hat{Y}_A = 0$$

$$\hat{X}_A \cdot \hat{Z}_A = 0$$



Representação

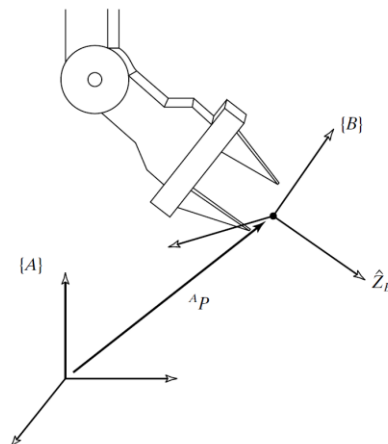
Descrição de orientação

- Descrever um corpo rígido utilizando um ponto pode não ser muito representativo
- É importante representar a orientação
- Descrita a partir de um sistema de coordenadas afixado no próprio corpo em relação a outro sistema de coordenadas



Representação

Descrição de orientação



Representação

Descrição de orientação

- Matriz de rotação de {B} em relação a {A}

$${}^A_R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- ${}^A\hat{X}_B$: Coordenada X do sistema {B} descrita no sistema {A}



Representação

Descrição de orientação

- Cossenos direcionais (diretores)

$${}^A_R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_B \cdot \hat{X}_A = \|\hat{X}_B\| \|\hat{X}_A\| \cos \theta = \cos \theta$$

$$\|\hat{X}_B\| = \|\hat{X}_A\| = 1$$



Representação

Descrição de orientação

- Matriz de rotação de {A} em relação a {B}

$${}^B_A R = \begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A & {}^B\hat{Y}_A & {}^B\hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{X}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Y}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Z}_B \end{bmatrix}$$



Representação

Descrição de orientação

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \\ {}^B\hat{Y}_A^T \\ {}^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix}$$

$${}^B_A R = {}^A_B R^T$$

- Isso sugere que o inverso de uma matriz de rotação é igual à sua transposta



Representação

Descrição de orientação

$${}^A_B R^T {}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B^T \\ {}^A \hat{Y}_B^T \\ {}^A \hat{Z}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} = I_3$$

$${}^A_B R = {}^B_A R^{-1} = {}^B_A R^T$$

- Matriz ortogonal
 - Colunas (ou linhas) são vetores ortonormais
 - A inversa é igual a sua transposta



Representação

Descrição de um referencial (*frame*)

- Sistema de coordenadas que, além da orientação, possui o vetor posição da sua origem em relação a outro *frame*

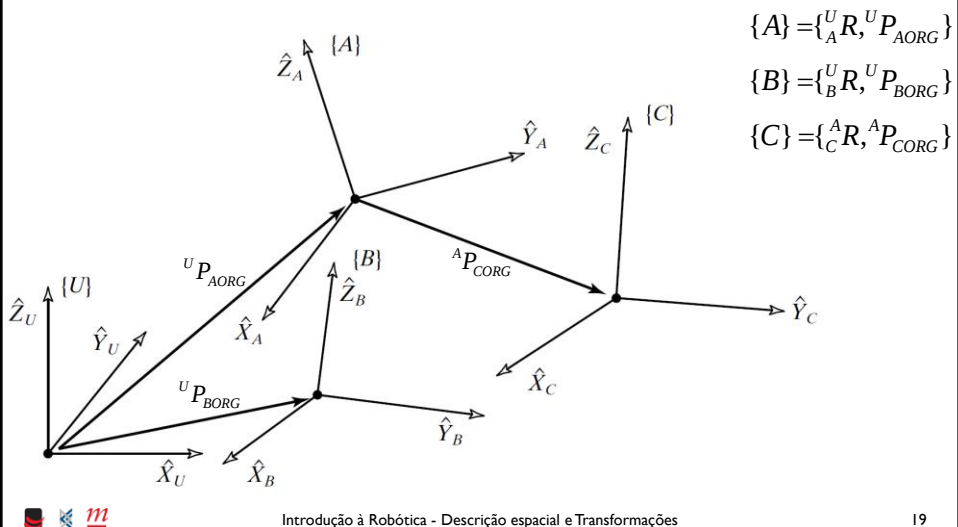
$$\{B\} = \{{}^A_B R, {}^A P_{BORG}\}$$

- Posição: *frame* em que a matriz de rotação é a matriz identidade
- Orientação: *frame* com vetor posição nulo



Representação

Descrição de um referencial (frame)



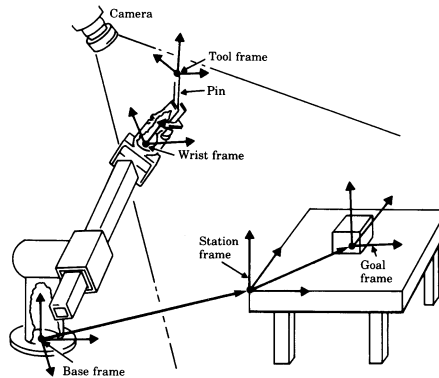
Representação

Descrição de um referencial (frame)

- Existem diversos sistemas de referências
 - Sistema de coordenadas do mundo
 - Sistema de coordenadas das juntas
 - Sistema de coordenadas de um objeto

Representação

Descrição de um referencial (*frame*)



- **B**ase, **W**rist, **T**ool, **S**tation, **G**oal



Representação

Mapeamentos

- Como descrever a posição de um ponto no referencial $\{A\}$ dada a descrição em $\{B\}$?
 - Mapeamento entre referenciais
- Utilizados para mudar descrições de um referencial para outro referencial
 - Translação e Rotação



Representação

Mapeamentos – Translação

- Referenciais com a mesma orientação (sem rotação relativa), porém origens diferentes

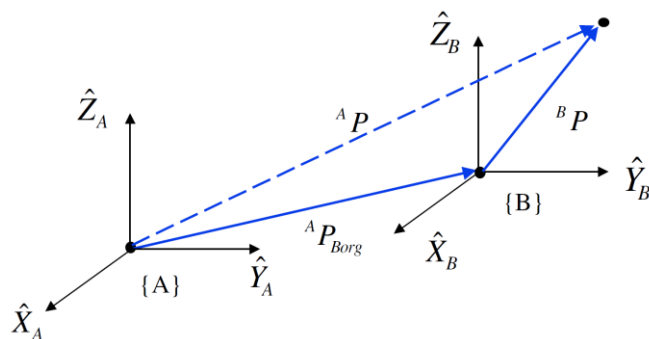
$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG}$$

- O vetor ${}^A P_{BORG}$ define um mapeamento



Representação

Mapeamentos – Translação



Representação

Mapeamentos – Translação (Exemplo)

- Dados 2 referenciais {A} e {B} com mesma orientação, porém a origem de {B} está deslocada 7 unidades da origem de {A} ao longo do eixo $\hat{X}_A$ e 2 unidades ao longo do eixo $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^B P$, defina ${}^A P_{BORG}$ e ${}^A P$.

$${}^B P = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$${}^A P_{BORG} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$



Representação

Mapeamentos – Rotação

- Referenciais com a mesma origem, porém com orientações diferentes
- Colunas da matriz de rotação são vetores unitários e mutuamente ortogonais, logo

$${}^A R_B = {}^B R_A^{-1} = {}^B R_A^T$$

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \hat{X}_A^T \\ {}^B \hat{Y}_A^T \\ {}^B \hat{Z}_A^T \end{bmatrix}$$



Representação

Mapeamentos – Rotação

- Projeções do vetor sobre os eixos (vetores unitários) do seu referencial

$${}^A p_x = {}^B \hat{X}_A \cdot {}^B P$$

$${}^A p_y = {}^B \hat{Y}_A \cdot {}^B P$$

$${}^A p_z = {}^B \hat{Z}_A \cdot {}^B P$$

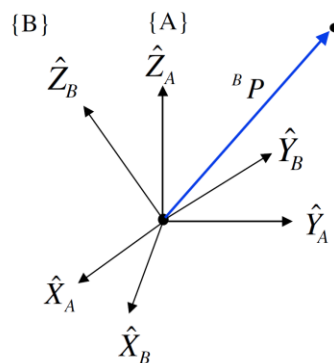
- Substituindo

$${}^A P = {}^A_B R {}^B P$$



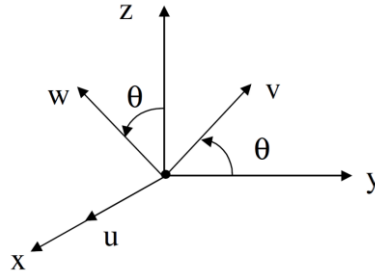
Representação

Mapeamentos – Rotação



Representação

Mapeamentos – Rotação



$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot i_v & i_x \cdot i_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot i_v & j_y \cdot i_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot i_v & k_z \cdot i_w \end{bmatrix} \quad R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Representação

Mapeamentos – Rotação

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Representação

Mapeamentos – Rotação (Exemplo)

- Um referencial {B} está rotacionado de $\theta = 30^\circ$ em relação ao eixo $\hat{Z}_A$ do referencial {A}. Dado o ponto ${}^B P$, defina ${}^A R$ e ${}^A P$.

$${}^B P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^A R = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$${}^A P = {}^A R {}^B P = \begin{bmatrix} -1,000 \\ 1,732 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$



Representação

Mapeamentos – Translação+Rotação

- Referenciais com origens e orientações diferentes. Considera-se duas etapas:
 - Descrever o ponto ${}^B P$ em relação a um referencial intermediário, com mesma orientação que {A}, mas origem igual a {B}

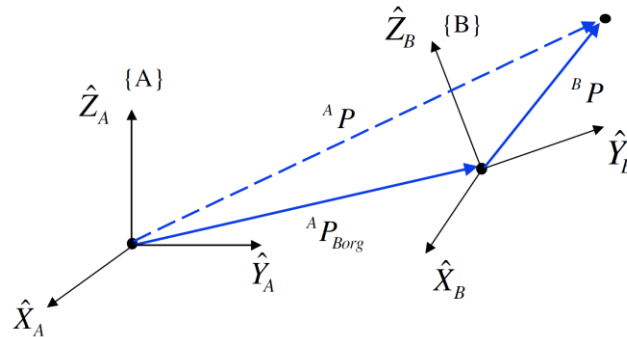
} Rotação
 } Translação
 - Somar a diferença entre as origens

$${}^A P = {}^A R {}^B P + {}^A P_{BORG}$$



Representação

Mapeamentos – Translação+Rotação



Representação

Coordenadas homogêneas

- Composição de translação e rotação se torna complexa ao agrupar várias operações
- Matrizes de transformações homogêneas
 - Forma mais elegante de compor transformações
 - Rotações, Translações e Escala
 - Qualquer dimensão do espaço



Representação

Transformação homogênea

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_{BORG} \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P + {}^A P_{BORG} \quad \rightarrow \quad {}^A P = {}^A T_B {}^B P$$



Representação

Transformação homogênea

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \Delta x \\ r_4 & r_5 & r_6 & \Delta y \\ r_7 & r_8 & r_9 & \Delta z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação (points to the 3x3 rotation matrix) Translação (points to the 3x1 translation vector)

Perspectiva (points to the bottom row of zeros) Escala (points to the bottom-right element '1')



Representação

Transformação homogênea (Exemplo)

- Seja $\{B\}$ um referencial rotacionado $\theta = 30^\circ$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladado 10 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 5 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^B P$, defina ${}^A T_B$ e ${}^A P$.

$${}^B P = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

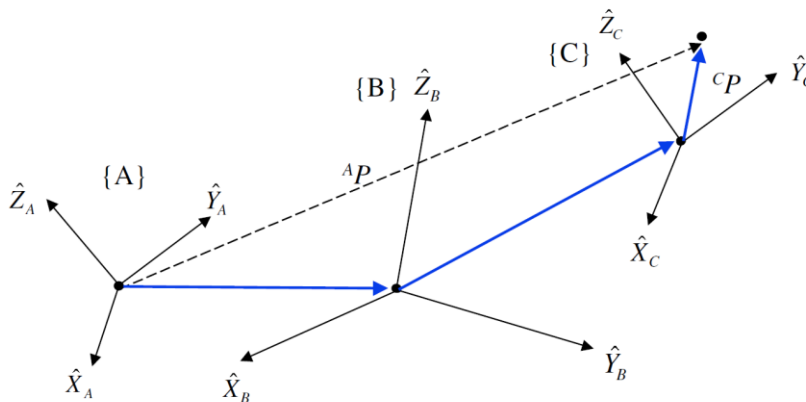
$${}^A T_B = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 10,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & 5,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A P = {}^A T_B {}^B P = \begin{bmatrix} 9,098 \\ 12,562 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$



Representação

Transformações compostas



Representação

Transformações compostas

- O referencial {C} é conhecido em relação a {B}, e o referencial {B} é conhecido em relação a {A}. Como obter ${}^A P$, a partir de ${}^C P$?
 - 1) ${}^B P = {}^B T {}^C P$
 - 2) ${}^A P = {}^A T {}^B P$
- Pode-se então, definir:

$${}^A T = {}^A T {}^B T$$



Representação

Transformações compostas

$${}^A T = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^A R {}^B R & {}^A R {}^B P_{CORG} + {}^A P_{BORG} & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



Representação

Invertendo uma transformação

- Dado um referencial $\{B\}$ conhecido em relação a $\{A\}$, ou seja, ${}^A_B T$ é conhecido
- Como fazer se queremos o contrário?
 - Descrição de $\{A\}$ em relação a $\{B\}$
 - Deseja-se obter ${}^B_A T$
- Pode-se calcular a inversa da matriz 4x4
 - Não é o mais eficiente computacionalmente



Representação

Invertendo uma transformação

- Como ser mais eficiente?
 - Estrutura inerente à transformação
- Para se obter ${}^B_A T$, deve-se calcular ${}^B_A R$ e ${}^B P_{AORG}$ a partir de ${}^A_B R$ e ${}^A P_{BORG}$
- Como visto anteriormente

$${}^B_A R = {}^A_B R^T$$



Representação

Invertendo uma transformação

- A descrição de ${}^A P_{BORG}$ em $\{B\}$ é dada por

$${}^B ({}^A P_{BORG}) = {}^B R {}^A P_{BORG} + {}^B P_{AORG}$$

- O lado esquerdo da equação deve ser zero

$${}^B P_{AORG} = - {}^B R {}^A P_{BORG} = - {}^B R^T {}^A P_{BORG}$$



Representação

Invertendo uma transformação

$${}^B T_A = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^B R^T & - {}^B R^T {}^A P_{BORG} & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^B T_A = {}^A T_B^{-1}$$



Representação

Invertendo uma transformação (Exemplo)

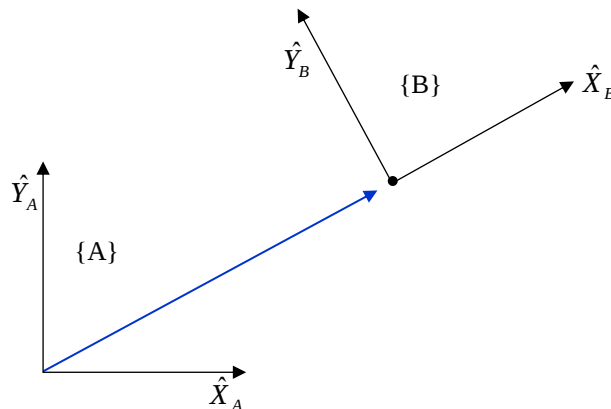
- Seja $\{B\}$ um referencial rotacionado $\theta = 30^\circ$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladado 4 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 3 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Dado ${}^A_B T$ defina ${}^B_A T$.

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 4,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & 3,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^B_A T = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,500 & 0,000 & -4,964 \\ -0,500 & 0,866 & 0,000 & -0,598 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Representação

Invertendo uma transformação (Exemplo)



Representação

Mapeamento

- O mapeamento não altera a posição do ponto, ele apenas muda a descrição de um ponto de um sistema de coordenadas para outro!

