

Introdução à Robótica

Robótica Móvel – Representação / Modelo

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

Introdução

Cinemática

- Como sistemas mecânicos se comportam
 - Considera posição, velocidade, aceleração
 - Não considera as forças e torques
- É importante para
 - Projetar robôs apropriados para as tarefas
 - Implementar algoritmos de controle corretos

Introdução

Cinemática

- Cinemática direta
 - Informado o conjunto de entradas de controle, como o robô se movimentará?
- Cinemática inversa
 - Informado o tipo de movimento desejado, quais devem ser as entradas de controle?



Introdução

Cinemática

- Similar à cinemática de manipuladores
- Principais diferenças (e problemas)
 - Não é possível medir diretamente a posição
 - É necessário integrar a posição no tempo
 - Gera imprecisão na estimativa da posição
 - Um dos principais problemas em robótica móvel!



Representação

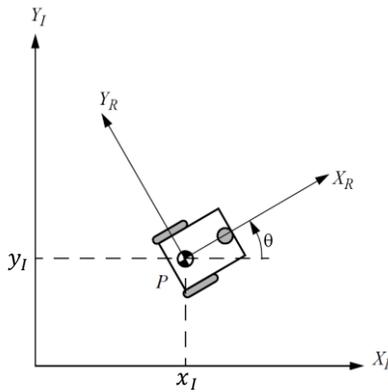
- O robô é modelado como um corpo rígido
 - 3 variáveis (plano)
 - 6 variáveis (espaço)
- Deve-se estabelecer uma relação entre o referencial local (robô) e o referencial global
 - Referencial global: $\{U\}$, $\{I\}$ ou $\{W\}$



Representação



Representação



Posição:

$$\mathbf{x} = [x \ y]^T$$

Configuração (Pose):

$$\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$$

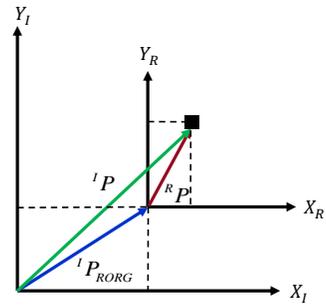
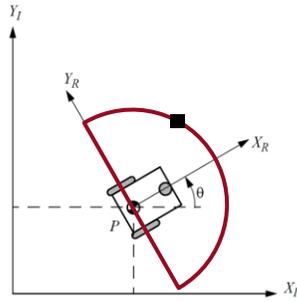
$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$$

Representação

- Informações sensoriais adquiridas em $\{R\}$
 - Encoders (velocidades), Laser, ...
- Deve-se realizar a transformação para $\{W\}$
 - Translação
 - Rotação

Representação

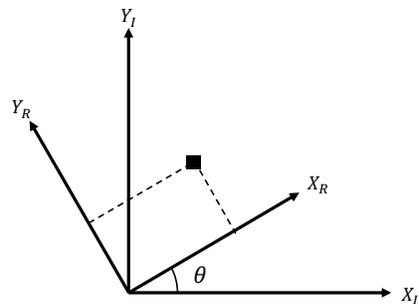
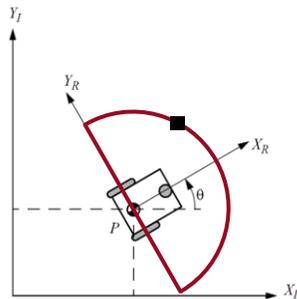
- Translação: ${}^I P = {}^R P + {}^I P_{ROORG}$



Representação

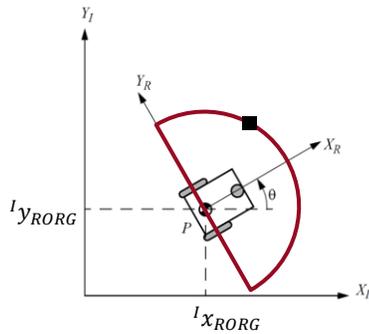
- Rotação: ${}^I P = {}^I R {}^R P$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Representação

- Transformação: ${}^I P = {}^I R^R P + {}^I P_{RORG}$



$${}^I P = \begin{bmatrix} {}^I x \\ {}^I y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R x \\ {}^R y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^I x_{RORG} \\ {}^I y_{RORG} \end{bmatrix}$$



Modelo cinemático

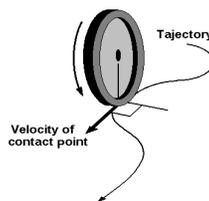
- Calcular a posição do robô em função das velocidades de seus atuadores
 - Centro de massa ou geométrico
 - Centro do eixo das rodas motrizes
- Cinemática direta → Modelo geométrico
- Cinemática inversa → Controle



Modelo cinemático

Considerações

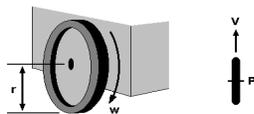
- Não ocorrem deslizamentos (derrapagem)
 - Direção ortogonal de rolamento
 - Translacional entre a roda e a superfície



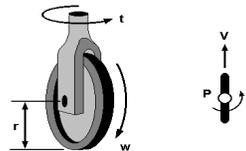
Modelo cinemático

Tipos de rodas

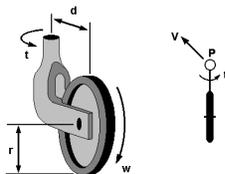
Fixa



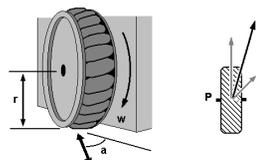
Orientável (centrada)



Orientável (fora do centro)



Sueca (omnidirecional)



Modelo cinemático

Parâmetros das rodas

- r : raio da roda
- ω : velocidade angular da roda
- v : velocidade linear da roda
- t : velocidade de giro de direção (*steering*)

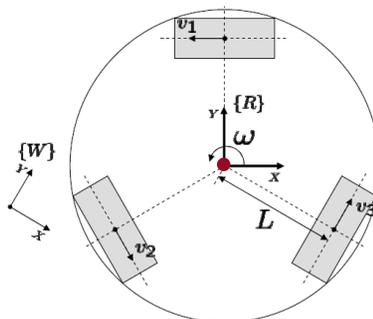


Modelo cinemático

Robô Omnidirecional

$$\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60) = \frac{1}{2}$$



Modelo cinemático

Robô Omnidirecional

- O modelo cinemático é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & r/2 & r/2 \\ 0 & -r\sqrt{3}/2 & r\sqrt{3}/2 \\ r/L & r/L & r/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{bmatrix}$$

- onde ω_1, ω_2 e ω_3 são as velocidades angulares das três rodas suacas



Modelo cinemático

Robô Diferencial

- Duas rodas motrizes paralelas
 - Mais uma roda ou *roller-ball* para o equilíbrio
- Mecanismo mais simples de movimentação
- Resultado das velocidades relativas das rodas
 - Pequenos erros geram diferentes caminhos, não apenas diferentes velocidades de movimentação



Modelo cinemático

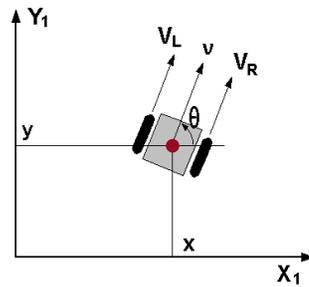
Robô Diferencial

- Velocidades v_L e v_R
 - Obtidas por ω_L e ω_R

- Entrada de controle

$$U = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

- Velocidade linear (v)
- Velocidade angular (ω)



Modelo cinemático

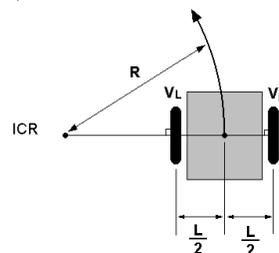
Robô Diferencial

- As trajetórias das rodas em torno do ICR possuem a mesma velocidade angular (ω)

$$v_L = \omega \left(R - \frac{L}{2} \right) \quad v_R = \omega \left(R + \frac{L}{2} \right)$$

$$\omega = \frac{v_L}{R - L/2} = \frac{r \omega_L}{R - L/2}$$

$$\omega = \frac{v_R}{R + L/2} = \frac{r \omega_R}{R + L/2}$$



Modelo cinemático

Robô Diferencial

- Velocidades rodas → Entrada de controle
- Resolvendo para ω

$$\omega = \frac{v_R - v_L}{L} = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{R - L/2}$$

- Como $v = \omega \cdot R$, temos

$$R = \frac{L(\omega_L + \omega_R)}{2(\omega_R - \omega_L)} \quad v = \frac{v_R + v_L}{2} = \frac{r(\omega_R + \omega_L)}{2}$$



Modelo cinemático

Robô Diferencial

- A partir de v e ω , é possível obter \dot{q} como

$$\dot{x}(t) = v(t) \cos \theta(t)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$

- O modelo cinemático é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta(t) / 2 & r \cos \theta(t) / 2 \\ r \sin \theta(t) / 2 & r \sin \theta(t) / 2 \\ r / L & -r / L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_R(t) \\ \omega_L(t) \end{bmatrix}$$



Modelo cinemático

Robô Diferencial

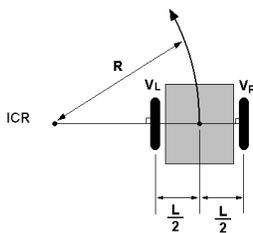
- Geralmente, controladores de mais baixo nível calculam v e ω a partir de ω_R e ω_L
- Modelo cinemático simplificado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$



Modelo cinemático

Robô Diferencial



- Movimento em linha reta
 - $V_R = V_L$
 - $R = \infty$
- Giro sobre o eixo
 - $V_R = -V_L$
 - $R = 0$



Modelo cinemático

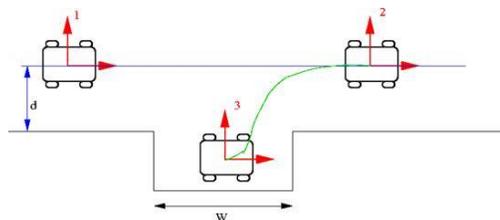
Robô Diferencial

- Restrição não-holonômica
 - O robô pode mover-se apenas na direção normal ao eixo das rodas motrizes
$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$$
- Qual o significado físico?
 - As próprias rodas já inserem as restrições!



Modelo cinemático

Robô Diferencial



Graus de Liberdade

- Número de variáveis independentes que representam a posição/orientação do robô
- Exemplos
 - Ponto no plano: 2
 - Robô no plano: 3
 - Corpo rígido no espaço: 6



Graus de Liberdade

- Atuados x Não Atuados
- Velocidades atuáveis $<$ DoF
 - Não-holonômico
- Velocidades atuáveis $=$ DoF
 - Holonômico
- Velocidades atuáveis $>$ DoF
 - Redundante



Manobrabilidade

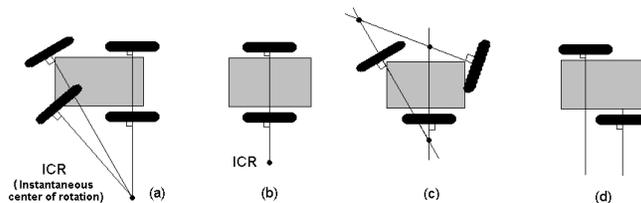
- Mobilidade cinemática
 - Habilidade de se mover pelo ambiente
- Rodas satisfazem restrição de rolamento
- Capacidade de manipular a posição
 - A partir da variação das velocidades
 - Através do movimento das rodas direcionais



Manobrabilidade

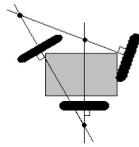
Arranjo das rodas

- Ponto de cruzamento entre todos os eixos
 - *Instantaneous center of rotation (ICR)*, ou
 - *Instantaneous center of curvature (ICC)*



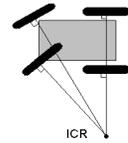
Grau de Mobilidade (*mobility*)

▪ Liberdade de movimento



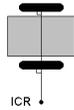
Não se move
(Nenhum ICR)

- Grau de mobilidade: 0



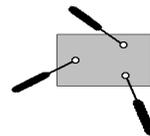
Arco (fixo)
(Um ICR)

- Grau de mobilidade: 1



Arco (variável)
(Linha de ICRs)

- Grau de mobilidade: 2



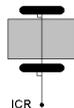
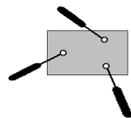
Movimento livre
(ICR livre)

- Grau de mobilidade: 3



Grau de Dirigibilidade (*steerability*)

▪ Número de rodas centradas orientáveis que podem ser movidas independentemente

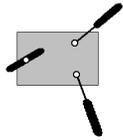


Nenhuma roda centrada orientável

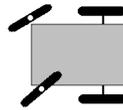
- Grau de dirigibilidade: 0



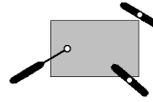
Grau de Dirigibilidade (steerability)



Um roda centrada orientável



Duas rodas centradas orientáveis dependentes



Duas rodas centradas orientáveis independentes

- Grau de dirigibilidade: 1

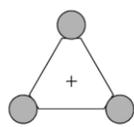
- Grau de dirigibilidade: 2



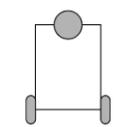
Grau de Manobrabilidade

- Os DoF total que um robô pode manipular

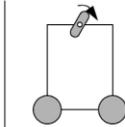
$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$



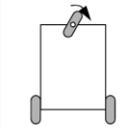
Omnidirectional
 $\delta_M = 3$
 $\delta_m = 3$
 $\delta_s = 0$



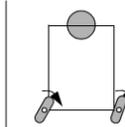
Differential
 $\delta_M = 2$
 $\delta_m = 2$
 $\delta_s = 0$



Omn-Steer
 $\delta_M = 3$
 $\delta_m = 2$
 $\delta_s = 1$



Tricycle
 $\delta_M = 2$
 $\delta_m = 1$
 $\delta_s = 1$



Two-Steer
 $\delta_M = 3$
 $\delta_m = 1$
 $\delta_s = 2$



Grau de Manobrabilidade

▪ Tipo do robô (δ_m, δ_s)

