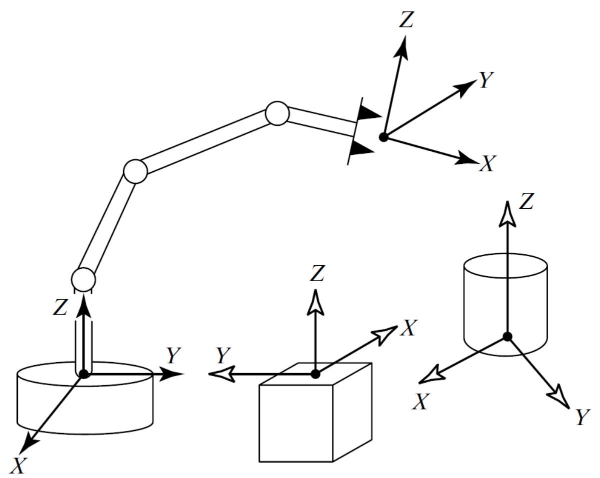
UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Introdução à Robótica
Descrição espacial e Transformações (1/2)

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

VERLab Visão e Robótica
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Introdução



Introdução

- Posições e Orientações
  - Partes, ferramenta e do próprio manipulador
- É necessário adotar uma convenção geral
- Sistema de coordenadas geral
  - E os sistemas de coordenadas locais?

Introdução
Objetivos

- Descrever corpos rígidos no espaço 3D
- Formulação matemática consistente
- Sistema de coordenadas universal
  - Transformações entre os referenciais

Introdução
Corpo rígido

- Entidade física
  - Forma e dimensões (tamanho) não se alteram
  - Distâncias relativas das partículas não se alteram
- De maneira geral (na prática)
  - Movimentos e deformações intrínsecas são desprezíveis comparado ao movimento total

Introdução
Notação

- Vetores e Matrizes
  - Letra Maiúscula
- Escalares
  - Letra Minúscula
- Referenciais
  - Sobrescrito e Subscrito precedentes

Representação

- Descrição da posição
- Descrição da orientação
- Descrição de um referencial

Representação
Descrição de posição

- Um vetor localiza um ponto no espaço 3D
- O vetor deve conter informações sobre qual sistema de coordenadas ele está definido

$$^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

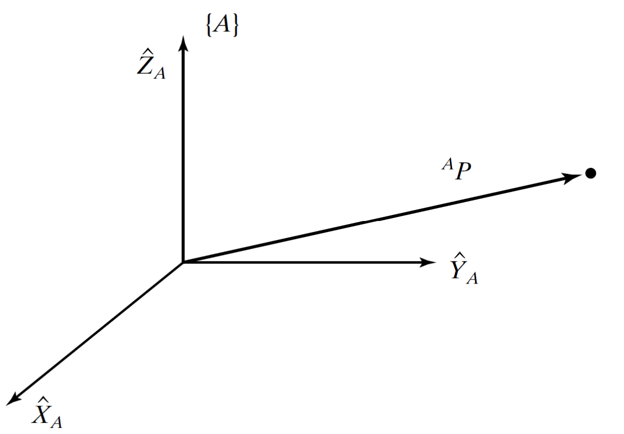
Representação

Descrição de posição

- Um sistema de coordenadas é representado por uma letra maiúscula entre chaves
- Vetores unitários que indicam as principais direções do sistema de coordenadas usam a notação "chapeu" (^)
  - Eixos principais

Representação

Descrição de posição



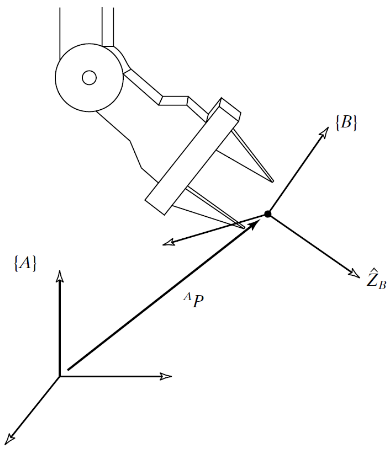
$$\hat{X}_A \times \hat{Y}_A = \hat{Z}_A$$
$$\hat{Y}_A \times \hat{Z}_A = \hat{X}_A$$
$$\hat{Z}_A \times \hat{X}_A = \hat{Y}_A$$

$$\hat{X}_A \cdot \hat{X}_A = \left\|\hat{X}_A\right\| = 1$$
$$\hat{X}_A \cdot \hat{Y}_A = 0$$
$$\hat{X}_A \cdot \hat{Z}_A = 0$$

Representação
Descrição de orientação

- Descrever um corpo rígido utilizando um ponto pode não ser muito representativo
- É importante representar a orientação
- Descrita a partir de um sistema de coordenadas afixado no próprio corpo em relação a outro sistema de coordenadas

Representação
Descrição de orientação



Representação
Descrição de orientação

- Matriz de rotação de {B} em relação a {A}

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

- ${}^{A}\hat{X}_{B}$: Coordenada X do sistema {B} escrita no sistema {A}

Representação
Descrição de orientação

- Cossenos diretores

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \hat{X}_{B}\cdot\hat{X}_{A} & \hat{Y}_{B}\cdot\hat{X}_{A} & \hat{Z}_{B}\cdot\hat{X}_{A} \\ \hat{X}_{B}\cdot\hat{Y}_{A} & \hat{Y}_{B}\cdot\hat{Y}_{A} & \hat{Z}_{B}\cdot\hat{Y}_{A} \\ \hat{X}_{B}\cdot\hat{Z}_{A} & \hat{Y}_{B}\cdot\hat{Z}_{A} & \hat{Z}_{B}\cdot\hat{Z}_{A} \end{bmatrix} $$

$$ \hat{X}_{B}\cdot\hat{X}_{A} = \left\|\hat{X}_{B}\right\|\left\|\hat{X}_{A}\right\|\cos\theta = \cos\theta $$

$$ \left\|\hat{X}_{B}\right\| = \left\|\hat{X}_{A}\right\| = 1 $$

Representação

Descrição de orientação

- Matriz de rotação de {A} em relação a {B}

$$ {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A} & {}^{B}\hat{Y}_{A} & {}^{B}\hat{Z}_{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{A} \cdot \hat{X}_{B} & \hat{Y}_{A} \cdot \hat{X}_{B} & \hat{Z}_{A} \cdot \hat{X}_{B} \\ \hat{X}_{A} \cdot \hat{Y}_{B} & \hat{Y}_{A} \cdot \hat{Y}_{B} & \hat{Z}_{A} \cdot \hat{Y}_{B} \\ \hat{X}_{A} \cdot \hat{Z}_{B} & \hat{Y}_{A} \cdot \hat{Z}_{B} & \hat{Z}_{A} \cdot \hat{Z}_{B} \end{bmatrix} $$

Representação

Descrição de orientação

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Y}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Z}_{A}^{T} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T} $$

- Isto sugere que o inverso de uma matriz de rotação é igual a sua transposta

Representação

Descrição de orientação

$$ {}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Y}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Z}_{B}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = I_3 $$

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} $$

- Matriz ortogonal
  - Colunas (ou linhas) são vetores ortonormais
  - A inversa é igual a sua transposta

Representação

Descrição de um referencial (*frame*)

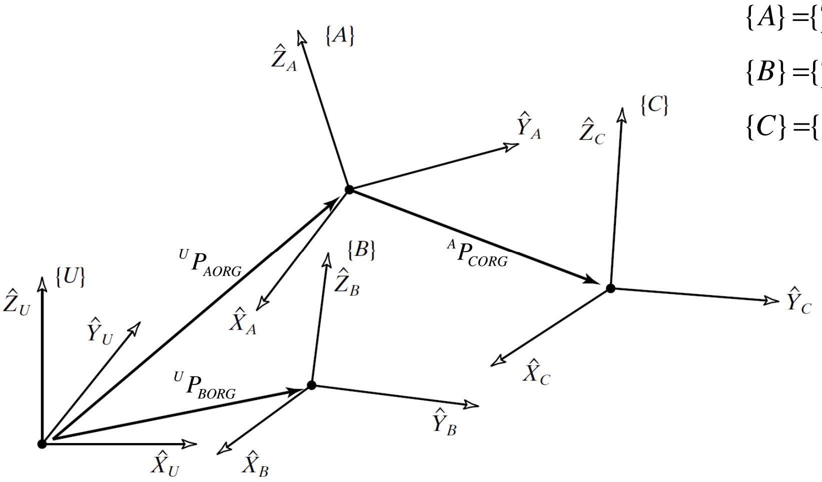
- Sistema de coordenadas que, além da orientação, possui o vetor posição da sua origem em relação a outro *frame*

$$ \{B\} = \{{}^{A}_{B}R, {}^{A}P_{BORG}\} $$

- Posição: *frame* em que a matriz de rotação é a matriz identidade
- Orientação: *frame* com vetor posição nulo

Representação

Descrição de um referencial (*frame*)



$$\{A\} = \{{}^U_A R, {}^U P_{AORG}\}$$

$$\{B\} = \{{}^U_B R, {}^U P_{BORG}\}$$

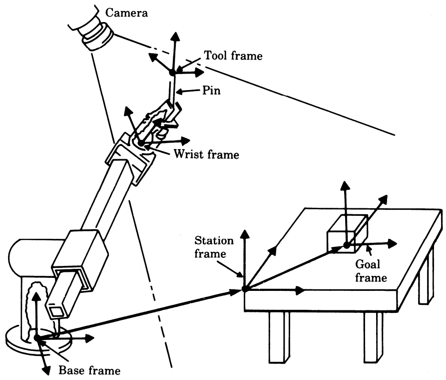
$$\{C\} = \{{}^A_C R, {}^A P_{CORG}\}$$

Representação

Descrição de um referencial (*frame*)

- Existem diversos sistemas de referências
  - Sistema de coordenadas do mundo
  - Sistema de coordenadas das juntas
  - Sistema de coordenadas de um objeto

Representação
Descrição de um referencial (*frame*)



- **B**ase, **W**rist, **T**ool, **S**tation, **G**oal

Representação
Mapeamentos

- Como descrever a posição de um ponto no referencial {A} dada a descrição em {B}?
  - Mapeamento entre referenciais
- Utilizados para mudar descrições de um referencial para outro referencial
  - Translação e Rotação

Representação

Mapeamentos – Translação

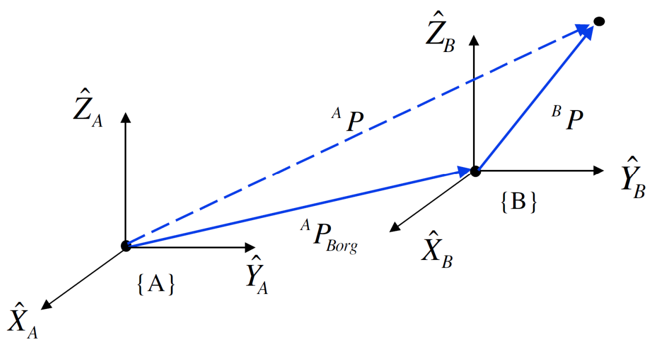
- Referenciais com a mesma orientação (sem rotação relativa), porém origens diferentes

$$ {}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} $$

- O vetor ${}^{A}P_{BORG}$ define um mapeamento

Representação

Mapeamentos – Translação



Representação
Mapeamentos – Translação (Exemplo)

- Dados 2 referenciais {A} e {B} com mesma orientação, porém a origem de {B} está deslocada 7 unidades da origem de {A} ao longo do eixo $\hat{X}_A$ e 2 unidades ao longo do eixo $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^{B}P$, defina ${}^{A}P_{BORG}$ e ${}^{A}P$.

$${}^{B}P = [4 \quad 3 \quad 5]^T$$

$${}^{A}P_{BORG} = [7 \quad 2 \quad 0]^T$$

$${}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Representação
Mapeamentos – Rotação

- Referenciais com a mesma origem, porém com orientações diferentes
- Colunas da matriz de rotação são vetores unitários e mutuamente ortogonais, logo

$${}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^T$$

$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_A^T \\ {}^{B}\hat{Y}_A^T \\ {}^{B}\hat{Z}_A^T \end{bmatrix}$$

Representação

Mapeamentos – Rotação

- Projeções do vetor sobre os eixos (vetores unitários) do seu referencial

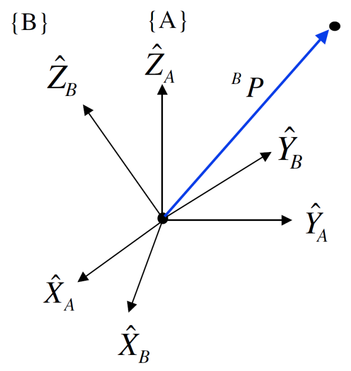
$$^{A}p_x = {}^{B}\hat{X}_A \cdot {}^{B}P$$
$$^{A}p_y = {}^{B}\hat{Y}_A \cdot {}^{B}P$$
$$^{A}p_z = {}^{B}\hat{Z}_A \cdot {}^{B}P$$

- Substituindo

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P$$

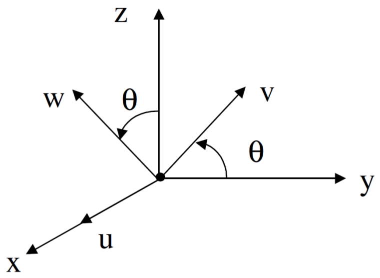
Representação

Mapeamentos – Rotação



Representação

Mapeamentos – Rotação



$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot i_v & i_x \cdot i_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot i_v & j_y \cdot i_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot i_v & k_z \cdot i_w \end{bmatrix} \qquad R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Representação

Mapeamentos – Rotação

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representação

Mapeamentos – Rotação (Exemplo)

- Um referencial {B} está rotacionado de $\theta = 30^\circ$ em relação ao eixo $\hat{Z}_A$ do referencial {A}. Dado o ponto ${}^{B}P$, defina ${}^{A}_{B}R$ e ${}^{A}P$.

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} -1{,}000 \\ 1{,}732 \\ 0{,}000 \end{bmatrix} $$

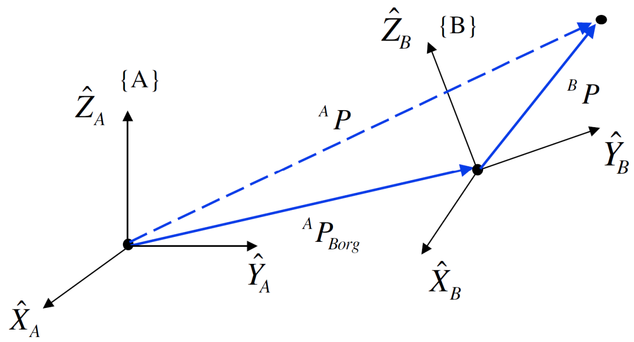
Representação

Mapeamentos – Translação+Rotação

- Referenciais com origens e orientações diferentes. Considera-se duas etapas:
  - Descrever o ponto ${}^{B}P$ em relação a um referencial <u>intermediário</u>, com mesma orientação que {A}, mas origem igual a {B} — Rotação
  - Somar a diferença entre as origens — Translação

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} $$

Representação
Mapeamentos – Translação+Rotação



Representação
Coordenadas homogêneas

- Composição de translação e rotação se torna complexa ao agrupar várias operações
- Matrizes de transformações homogêneas
  - Forma mais elegante de compor transformações
  - Rotações, Translações e Escala
  - Qualquer dimensão do espaço

Representação

Transformação homogênea

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ \hdashline 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ \hdashline 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \quad \Rightarrow \quad {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$$

Representação

Transformação homogênea

$$\left[\begin{array}{ccc:c} r_1 & r_2 & r_3 & \Delta x \\ r_4 & r_5 & r_6 & \Delta y \\ r_7 & r_8 & r_9 & \Delta z \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rotação

Translação

Perspectiva

Escala

Representação

Transformação homogênea (Exemplo)

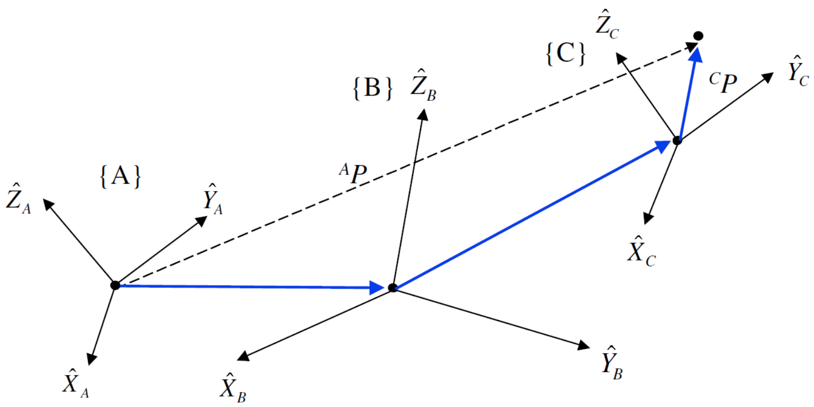
- Seja {B} um referencial rotacionado $\theta = 30^{\circ}$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladado 10 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 5 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^{B}P$, defina ${}^{A}_{B}T$ e ${}^{A}P$.

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 & 10{,}0 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & 5{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} 9{,}098 \\ 12{,}562 \\ 0{,}000 \end{bmatrix} $$

Representação

Transformações compostas



Representação
Transformações compostas

- O referencial {C} é conhecido em relação a {B}, e o referencial {B} é conhecido em relação a {A}. Como obter ${}^{A}P$, a partir de ${}^{C}P$?
  - 1) ${}^{B}P = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$
  - 2) ${}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$

$\Rightarrow$ ${}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$

- Pode-se então, definir:

$${}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T$$

Representação
Transformações compostas

$${}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Representação
Invertendo uma transformação

- Dado um referencial {B} conhecido em relação a {A}, ou seja, ${}^{A}_{B}T$ é conhecido
- Como fazer se queremos o contrário?
  - Descrição de {A} em relação a {B}
  - Deseja-se obter ${}^{B}_{A}T$
- Pode-se calcular a inversa da matriz 4x4
  - Não é o mais eficiente computacionalmente

Representação
Invertendo uma transformação

- Como ser mais eficiente?
  - Estrutura inerente à transformação
- Para se obter ${}^{B}_{A}T$,deve-se calcular ${}^{B}_{A}R$ e ${}^{B}P_{AORG}$ a partir de ${}^{A}_{B}R$ e ${}^{A}P_{BORG}$
- Como visto anteriormente

$${}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T}$$

Representação

Invertendo uma transformação

- A descrição de ${}^{A}P_{BORG}$ em {B} é dada por

$$^{B}({}^{A}P_{BORG}) = {}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG} + {}^{B}P_{AORG}$$

- O lado esquerdo da equação deve ser zero

$$^{B}P_{AORG} = -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG} = -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG}$$

Representação

Invertendo uma transformação

$$^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R^{T} & & -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1}$$

Representação

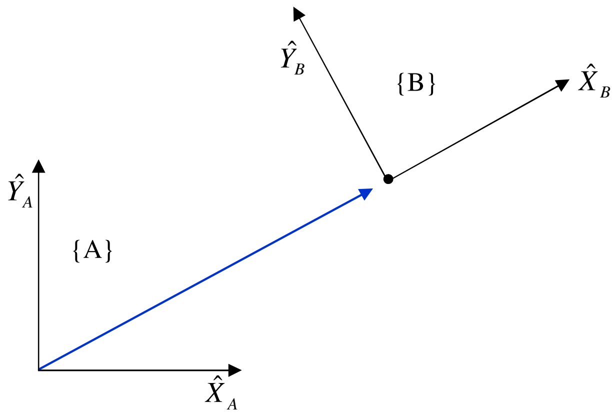
Invertendo uma transformação (Exemplo)

- Seja {B} um referencial rotacionado $\theta = 30^\circ$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladado 4 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 3 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Dado ${}^A_BT$ defina ${}^B_AT$.

$$ {}^A_BT = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 & 4{,}0 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & 3{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^B_AT = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}500 & 0{,}000 & -4{,}964 \\ -0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & -0{,}598 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

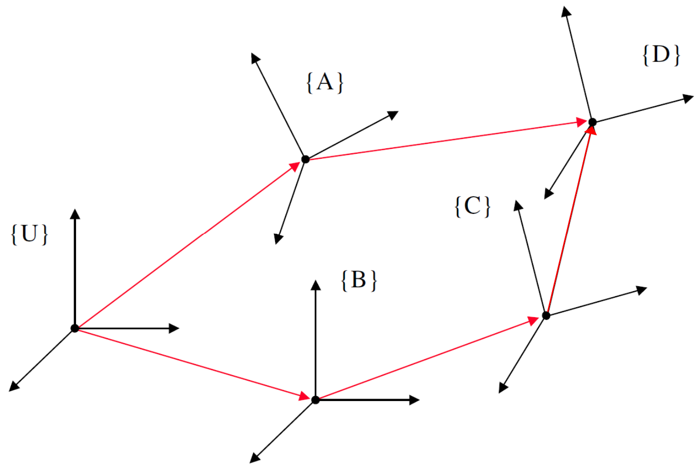
Representação

Invertendo uma transformação (Exemplo)



Representação

Equações de transformações



Representação

Equações de transformações

- O referencial {D} pode ser obtido como

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{A}T \, {}^{A}_{D}T \quad \text{ou} \quad {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{B}T \, {}^{B}_{C}T \, {}^{C}_{D}T $$

- Equação de transformação

$$ {}^{U}_{A}T \, {}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T \, {}^{B}_{C}T \, {}^{C}_{D}T $$

Representação

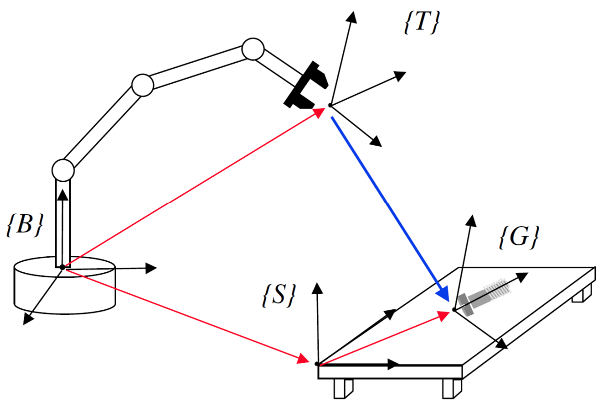
Equações de transformações

- Utilizadas para resolver transformações no caso de *n* equações de transformações, e *n* transformações desconhecidas
- No caso anterior, se ${}^{B}_{C}T$ fosse desconhecido

$$ {}^{B}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T\,{}^{C}_{D}T^{-1} $$

Representação

Equações de transformações



Representação
Mapeamento

- O mapeamento não altera a posição do ponto, ele apenas muda a descrição de um ponto de um sistema de coordenadas para outro!