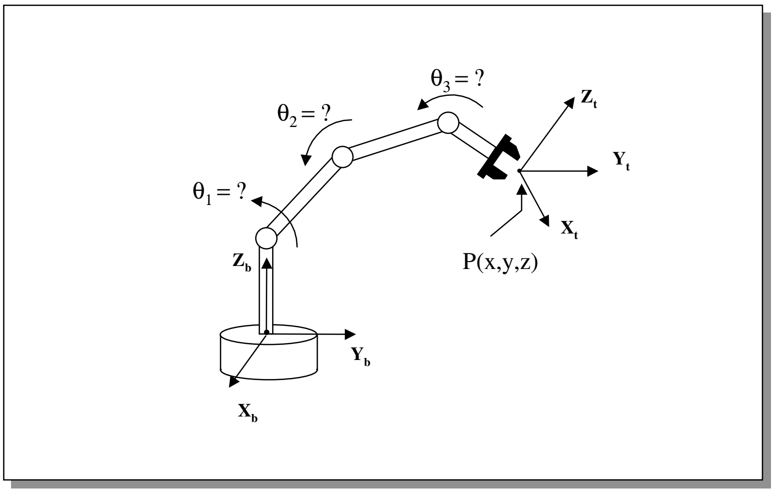
Cinemática Inversa
de
Manipuladores

Introdução

- Cinemática Inversa
  - Como calcular os valores das variáveis de junta que produzirão a posição e orientação desejadas do órgão terminal?

Introdução



Solucionabilidade

- Problema não-linear:
  - Dado o valor numérico de ${}^{0}_{N}T$ encontrar os valores de θ_1, θ_2 , …, θ_N.
- No caso do PUMA 560, o problema poderia ser colocado da seguinte maneira:
  - Dado ${}^{0}_{N}T$ como um conjunto de 16 valores numéricos, sendo quatro deles triviais, calcular os seis ângulos de junta, θ_1, θ_2 , …, θ_6.

Solucionabilidade

- Em casos de braços com 6 graus de liberdade, temos 12 equações e 6 incógnitas, sendo que das 9 equações oriundas da matriz de rotação, apenas 3 são independentes.
- Juntamente com as 3 equações relativas ao vetor de posição de ${}^{0}_{6}T$, tem-se 6 equações e 6 incógnitas.
- Problemas com equações não-lineares: existência de solução, soluções múltiplas, e método de solução.

Existência de Soluções

- **Espaço de trabalho**

  Volume definido por todos os pontos alcançáveis pelo manipulador

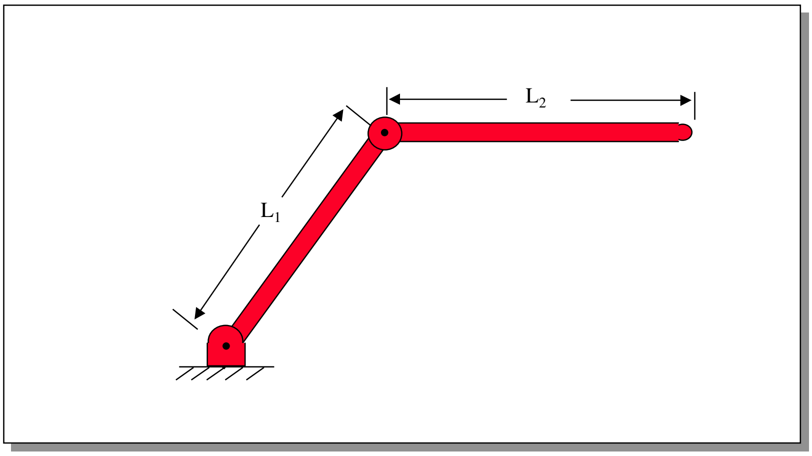
  - **Espaço Destro**

    Volume do espaço de trabalho definido por todos os pontos alcançáveis pelo manipulador em todas orientações possíveis

  - **Espaço Alcançável**

    Volume do espaço de trabalho definido por todos os pontos alcançáveis pelo manipulador com pelo menos uma orientação.

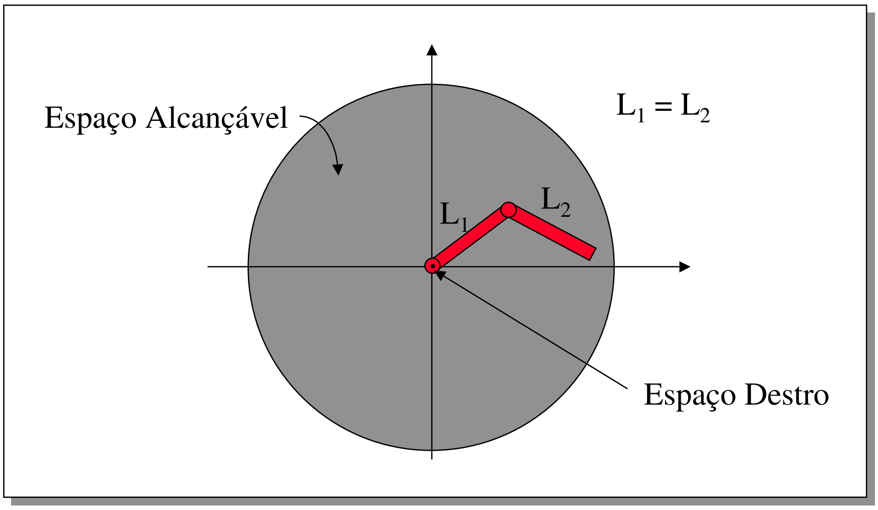
Existência de Soluções



Existência de Soluções

- Na figura a seguir, $L_1 = L_2$, o espaço alcançável é um círculo de raio $r = 2L_1$.
- O espaço destro restringe-se a um único ponto, a origem.

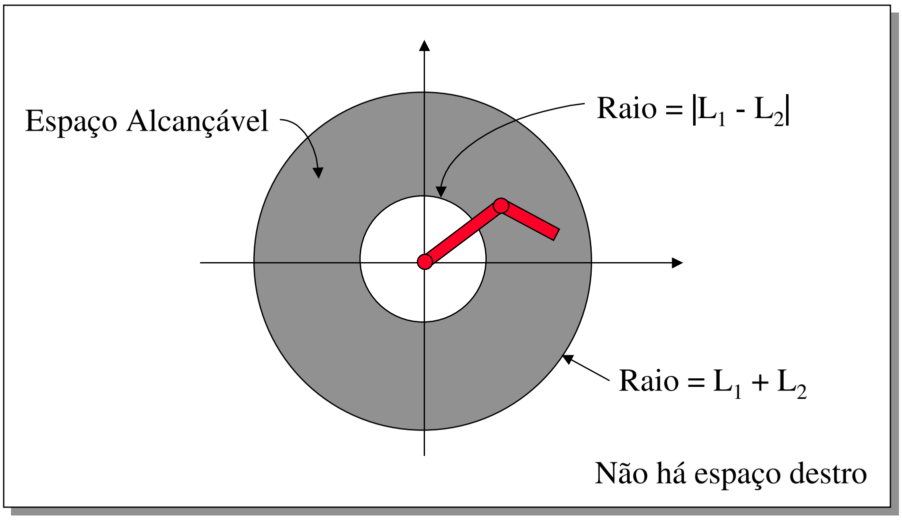
Existência de Soluções



Existência de Soluções

- Na figura a seguir, $L_1 \neq L_2$, o espaço de trabalho alcançável é um uma coroa, cujo raio menor é $|L_1 - L_2|$ e o raio maior é definido por $L_1 + L_2$.
- Dentro do espaço alcançável, existem duas orientações possíveis. No limite deste espaço, há apenas uma.
- Observe que *não* há espaço destro.

Existência de Soluções



Existência de Soluções

- O espaço de trabalho alcançável, no caso real, seria menor, uma vez que as juntas possuem limites.
- Na figura anterior, se θ_1 puder assumir todos os valores entre 0 e 360 graus, mas $0° \leq \theta_2 \leq 180°$, o espaço alcançável é o mesmo, porém apenas uma orientação é possível em cada ponto.

Existência de Soluções

- Quando um manipulador possui menos do que seis graus de liberdade, ele não poderá alcançar posições e orientações arbitrárias no espaço 3D.
- O espaço de trabalho desses manipuladores é um *subconjunto* de um *sub-espaço* que pode ser associado a um manipulador qualquer.
- O espaço de trabalho também depende da transformação do referencial da ferramenta, uma vez que é a sua ponta que alcançará os pontos do espaço.

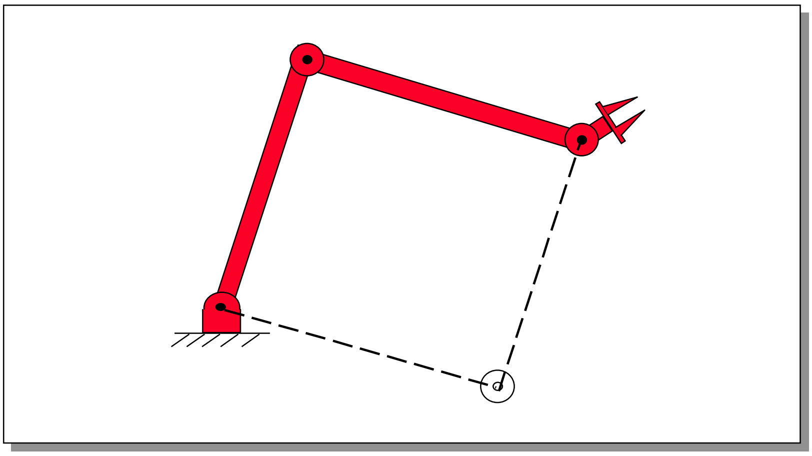
Existência de Soluções

- Sempre se considera o espaço de trabalho do pulso $\{W\}$. Para cada órgão terminal, o referencial da ferramenta é definido $\{T\}$. Dado um determinado alvo, $\{G\}$, o referencial $\{W\}$ é calculado. Verifica-se, então, se o orientação e a posição de $\{W\}$ encontra-se no espaço de trabalho. Se estiver, pelo menos uma solução existirá.
- O usuário pensa em termos de $\{T\}$, e computacionalmente falando, pensamos em $\{W\}$.

Soluções Múltiplas

- Um braço planar, com 3 graus de liberdade (juntas revolutas) pode possuir um grande espaço de trabalho destro, desde que os elos tenham comprimento adequado e as juntas possuam boa faixa de trabalho.
- Na figura a seguir, pode-se observar que existem duas configurações distintas, com a garra na mesma posição e orientação.
- O critério na escolha da solução varia, mas uma escolha razoável seria a solução mais *próxima*.

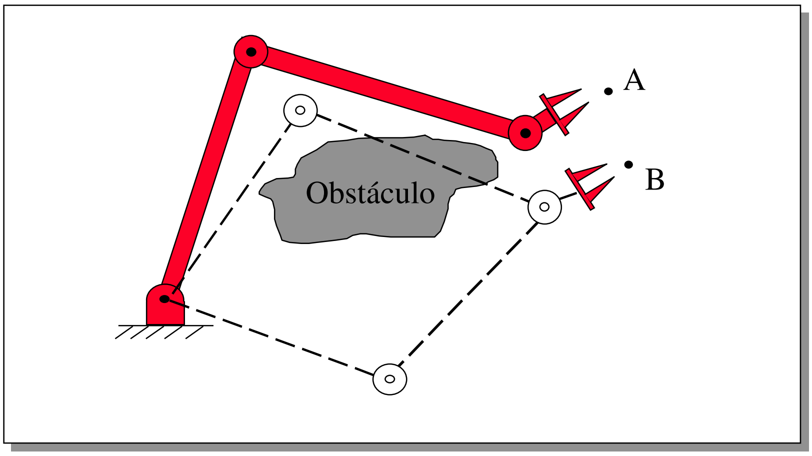
Soluções Múltiplas



Soluções Múltiplas

- Na figura a seguir, a melhor solução seria aquela em que minimizam a quantidade que as juntas do manipulador tenham que se mover. Se não houvesse o obstáculo, a configuração superior seria escolhida.
- Uma das entradas para o cálculo da cinemática inversa é, portanto, a posição corrente do manipulador.
- Mais *próxima* pode significar que a atuação em elos menores sejam escolhidos em vez de elos maiores.

Soluções Múltiplas



Soluções Múltiplas

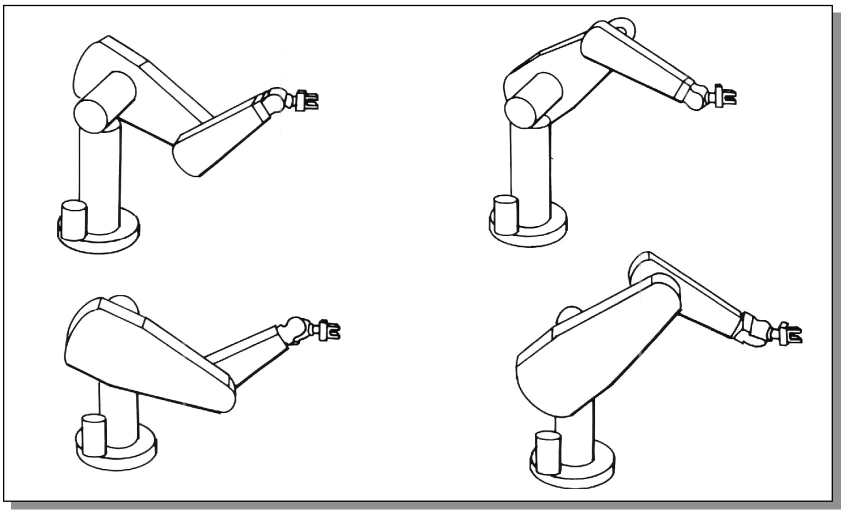
- A quantidade de soluções depende da quantidade de juntas, mas também é função dos parâmetros de elo (α_i, a_i e d_i para juntas revolutas) e dos limites de movimento das juntas.
- Na figura a seguir, vê-se que o PUMA 560 pode alcançar alguns alvos em quatro configurações distintas.

Soluções Múltiplas

- Para cada uma das soluções existe uma outra alternativa, na qual as últimas três juntas alternam para uma outra configuração segundo das fórmulas e produzindo oito configurações possíveis:

$$\theta'_4 = \theta_4 + 180°$$
$$\theta'_5 = -\theta_5$$
$$\theta'_6 = \theta_6 + 180°$$

Soluções Múltiplas



Soluções Múltiplas

- A tabela abaixo mostra como o número de soluções possíveis está relacionado a quantidade de parâmetros de comprimento de elo, a_i , que são iguais a zero.

a_i	Número de Soluções
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	<= 4
$a_3 = a_5 = 0$	<= 8
$a_3 = 0$	<= 16
Todos a_i < > 0	<= 16

Métodos de Solução

- Não existem algoritmos gerais que resolvem equações não-lineares.
- Um manipulador é considerado *solúvel* se as variáveis de junta são determináveis por um algoritmo que calcula *todos* os conjuntos de de variáveis de junta associadas com uma certa posição e orientação.
- Duas classes de soluções:
  - Soluções fechadas
  - Soluções numéricas — muito mais lentas

Métodos de Solução

- Soluções fechadas, neste contexto, são aquelas cujos métodos são baseados em expressões analíticas ou na solução de um polinômio de grau menor ou igual a 4. Serão considerados dois métodos:
  - Algébricos
  - Geométricos
- Esses métodos se distinguem apenas na abordagem.

Métodos de Solução

- *Todos os sistemas com juntas revolutas ou prismáticas, possuindo um total de seis graus de liberdade em uma única cadeia cinemática são solúveis.*
- Essa solução geral, entretanto, é numérica
- Robôs com 6 dof que possuem solução analítica ou fechada, são caracterizados por diversas juntas que se interceptam e/ou muitos α_i iguais a ±90º

Métodos de Solução

- Condição suficiente para que um manipulador com 6 dof tenha solução fechada é que três eixos adjacentes se interceptem em um ponto.
- Quase todos os manipuladores com seis graus de liberdade, hoje, atendem esse requisito.
- PUMA 560 – eixos 4,5 e 6 se interceptam.

Subespaço do robô para $n < 6$

- O espaço alcançável de um manipulador com n dof, onde $n < 6$, é uma porção do ***subespaço*** de n graus de liberdade.
  - Ex.: o subespaço de um manipulador planar de 2 elos é um plano, mas o espaço de trabalho é um subconjunto desse plano.

Subespaço dor robô para $n < 6$

- Uma das maneiras de se especificar o subespaço de um manipulador de n dof, é fornecer uma expressão para o referencial de pulso $\{W\}$, ou de ferramenta $\{T\}$, em função das n variáveis. O subespaço é produzido quando as variáveis tomam todos os valores possíveis.

Subespaço do robô para $n < 6$

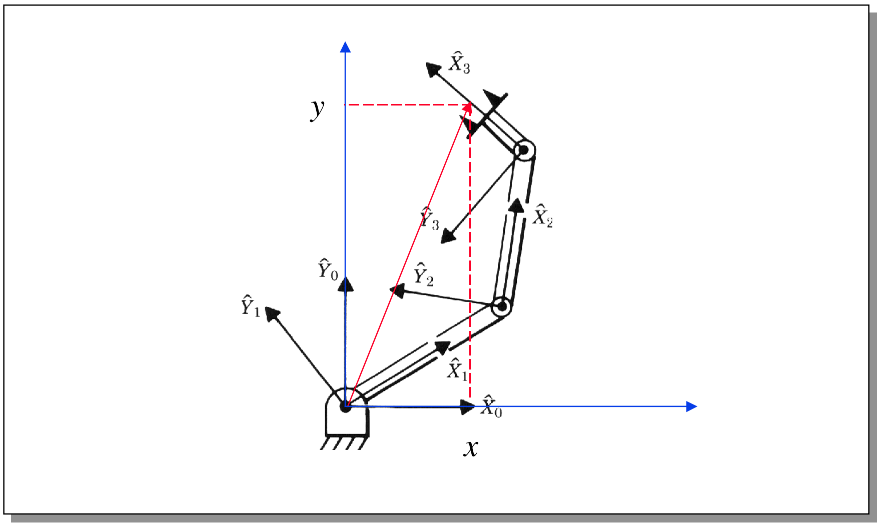
- Exemplo:

  Dar a descrição do subespaço de ${}^{B}_{W}T$ para o manipulador de 3 elos da figura a seguir.

$$
{}^{B}_{W}T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

onde, x e y são as coordenadas da posição, e ϕ descreve a orientação do elo terminal.

Subespaço do robô para $n < 6$



Subespaço do robô para n < 6

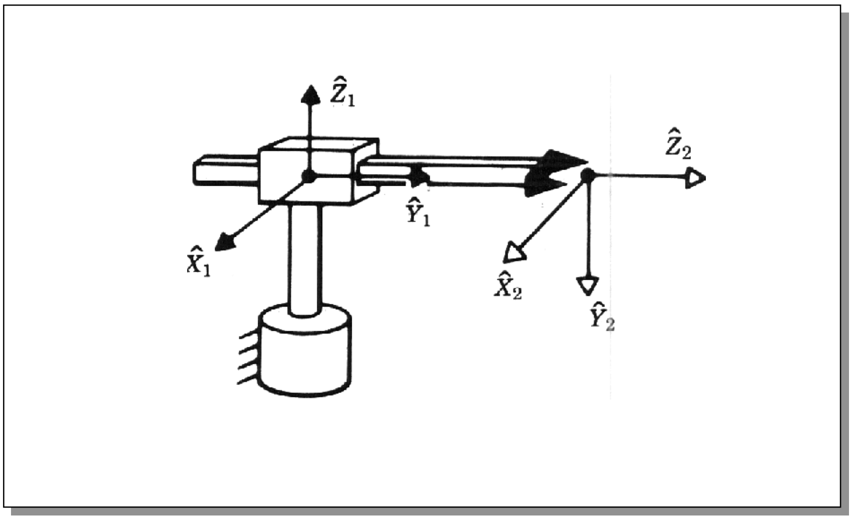
- Exemplo:

  Dar a descrição do subespaço de ${}^{0}_{2}T$ para o manipulador polar com 2 dof mostrado na figura a seguir.

$$ {}^{0}P_{2ORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} $$

Onde x e y podem assumir quaisquer valores.

Subespaço do robô para n < 6



Subespaço do robô para $n < 6$

- A orientação é restrita pois o eixo ${}^0\hat{Z}_2$ deve apontar na direção que depende de x e y. O eixo ${}^0\hat{Y}_2$ sempre aponta para baixo, e o eixo ${}^0\hat{X}_2$ pode ser calculado através do produto vetorial ${}^0\hat{Y}_2 \times {}^0\hat{Z}_2$.

$$
{}^0\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Subespaço do robô para $n < 6$

- O subespaço é calculado por:

$$
{}^0_2T = \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Subespaço do robô para $n < 6$

- Geralmente, quando se define um um alvo para um manipulador de n dof, utiliza-se n parâmetros para especificar este alvo.
- Por outro lado, se especificarmos o alvo com 6 dof, em geral não será possível alcançar aquele alvo com um manipulador com $n < 6$ dof.

Subespaço do robô para $n < 6$

- Uma estratégia para especificar *alvos genéricos* para um manipulador com menos de 6 dof:
  1. Dado um referencial do alvo, s_{T} , calcular um referencial alvo modificado, s_{T} , de forma que s_{T} pertença ao subespaço do manipulador e esteja tão *próximo* a s_{T} quanto for possível.
  2. Calcular a cinemática inversa para encontrar os valores de juntas utilizando s_{T} como o alvo desejado. Este ponto pode ainda não estar no espaço do manipulador.

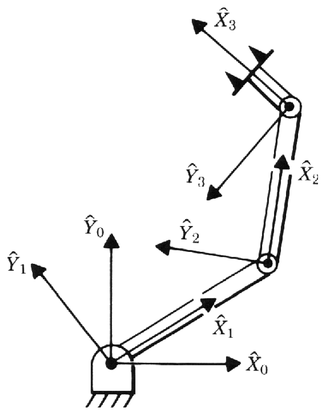
Algébrica x Geométrica

- Existem alguns métodos de se calcular a cinemática inversa de manipuladores:
  - Transformada inversa
  - Álgebra de *parafuso*
  - Matrizes duais
  - Quatérnios duais
  - Iterativo
  - Geométrico

Solução Algébrica

- A solução algébrica busca determinar a cinemática inversa a partir das equações de transformação e da descrição do posição e orientação que se deseja alcançar.
- A seguir, um exemplo mostra esse método para o manipulador mostrado na próxima figura.

Solução Algébrica



Solução Algébrica

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

Solução Algébrica

Utilizando o método descrito anteriormente para cinemática direta, utilizando-se os parâmetros da tabela anterior, define-se a equação cinemática do braço:

$$ {}^{B}_{W}T = {}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0.0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0.0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Solução Algébrica

- O fato de se tratar de um manipulador planar, o alvo pode ser mais facilmente especificado com 3 valores: x, y e ϕ, que descrevem a orientação do elo 3 no plano. Ou seja, ${}^{B}_{W}T$ pode ser descrita através de uma estrutura mais genérica:

$$ {}^{B}_{W}T = \begin{bmatrix} c_{\phi} & -s_{\phi} & 0.0 & x \\ s_{\phi} & c_{\phi} & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Solução Algébrica

- Igualando-se as duas equações, tem-se que:

$$c_\phi = c_{123}$$
$$s_\phi = s_{123}$$
$$x = l_1c_1 + l_2c_{12}$$
$$y = l_1s_1 + l_2s_{12}$$

Solução Algébrica

Resolvendo, temos que:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2c_2,$$

e para c_2

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

o lado direito da equação acima ter valor entre -1 e +1

Solução Algébrica

Assumindo que o alvo está no espaço de trabalho, pode-se escrever a expressão de s_2:

$$s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$$

portanto,

$$\theta_2 = \text{Atan2}\,(s_2, c_2)$$

Solução Algébrica

Pode-se, agora, calcular θ_1:

$$x = k_1 c_1 - k_2 s_1$$
$$y = k_1 s_1 + k_2 c_1$$

onde

$$k_1 = l_1 + l_2 c_2$$
$$k_2 = l_2 s_2$$

se

$$r = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad \text{e} \quad \gamma = \text{Atan2}\,(k_2, k_1)$$

Solução Algébrica

então

$$k_1 = r \cos\gamma$$
$$k_2 = r \,\text{sen}\, \gamma$$

Pode-se escrever

$$\frac{x}{r} = \cos\gamma \cos\theta_1 - \text{sen}\,\gamma \,\text{sen}\,\theta_1$$
$$\frac{y}{r} = \cos\gamma \,\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\gamma \cos\theta_1$$

Solução Algébrica

ou

$$\cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{r}$$
$$\text{sen}(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{r}$$

tem-se ainda que

$$\gamma + \theta 1 = \text{Atan2}\left(\frac{y}{\;}, \frac{x}{\;}\right) = \text{Atan2}(y, x)$$

portanto

Solução Algébrica

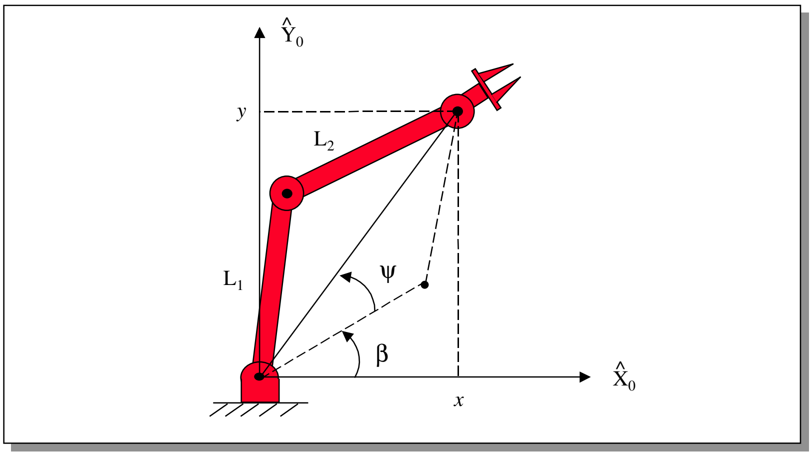
Finalmente, θ_3 pode ser calculado a partir da soma:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \mathrm{Atan2}\left(s_\phi, c_\phi\right) = \phi$$

Solução Geométrica

- A abordagem geométrica envolve decompor o problema de geometria espacial do manipulador em vários problemas de geometria plana.
- A figura a seguir mostra o triângulo formado por $l1$, $l2$ e a reta que liga o referencial da origem {O} com a origem do referencial {3}. (As linhas tracejadas mostram a outra solução).

Solução Geométrica



Solução Geométrica

Aplicando a lei dos cosenos:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos(180° + \theta_2)$$

Uma vez que cos (180 + θ_2) = – cos (θ_2), tem-se que:

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$$

Solução Geométrica

Para que este triângulo exista, é necessário que o alvo $\sqrt{x^2 + y^2}$ seja menor ou igual à soma dos comprimentos dos elos, $l_1 + l_2$. A equação anterior é resolvida para o valor de θ_2 que esteja entre 0 e -180.

Para resolver para θ_1, tem-se de encontrar expressões para os ângulos ψ e β:

$$\beta = \text{Atan2 (y, x)}$$

$$\cos\psi = \frac{x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Solução Geométrica

Para que a geometria seja preservada, o arcos deve ter solução de forma que $0 \leq \Psi \leq 180°$. Tem-se que:

$$\theta_1 = \beta \pm \Psi$$

onde o sinal "+"é usado quando $\theta_2 < 0$, e "–" quando $\theta_2 > 0$. Finalmente, tem-se o valor de θ_3 calculado a partir de:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi$$

Exemplos de cinemática inversa

– O PUMA560
– O Yaskawa Motoman L3