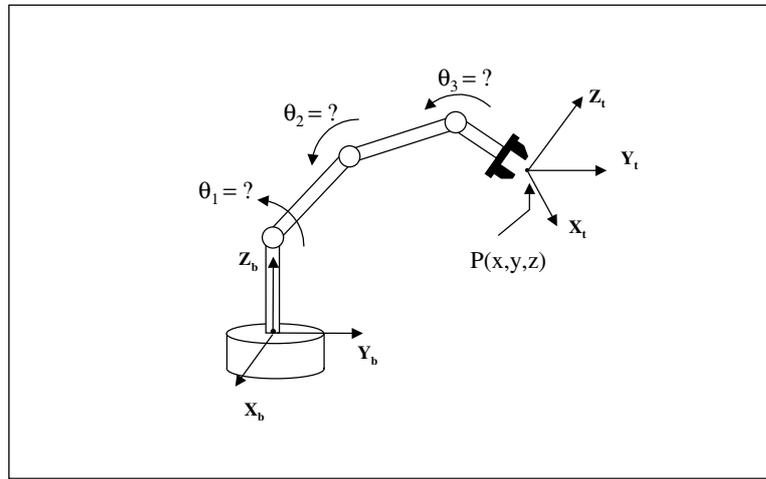

Cinemática Inversa de Manipuladores

Introdução

- ◆ Cinemática Inversa
 - Como calcular os valores das variáveis de junta que produzirão a posição e orientação desejadas do órgão terminal?

Introdução



©1998Mario Campos

3

Solucionabilidade

- ◆ Problema não-linear:
 - Dado o valor numérico de ${}^0_N T$ encontrar os valores de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$.
- ◆ No caso do PUMA 560, o problema poderia ser colocado da seguinte maneira:
 - Dado ${}^0_N T$ como um conjunto de 16 valores numéricos, sendo quatro deles triviais, calcular os seis ângulos de junta, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$.

©1998Mario Campos

4

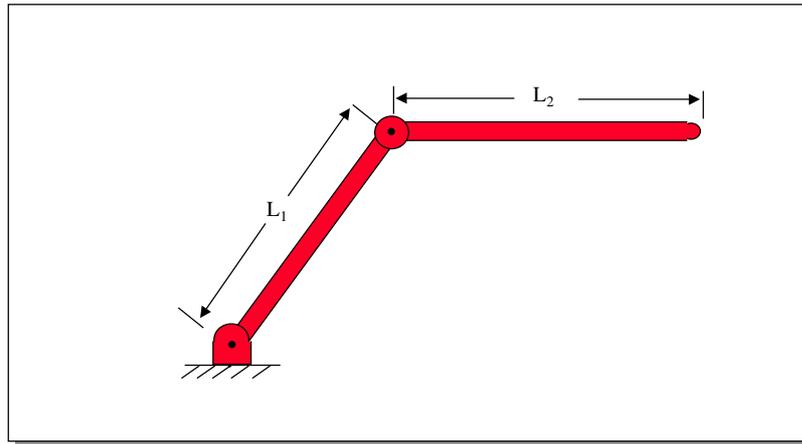
Solucionabilidade

- ◆ Em casos de braços com 6 graus de liberdade, temos 12 equações e 6 incógnitas, sendo que das 9 equações oriundas da matriz de rotação, apenas 3 são independentes.
- ◆ Juntamente com as 3 equações relativas ao vetor de posição de 0T_6 , tem-se 6 equações e 6 incógnitas.
- ◆ Problemas com equações não-lineares: existência de solução, soluções múltiplas, e método de solução.

Existência de Soluções

- ◆ **Espaço de trabalho**
 - Volume definido por todos os pontos alcançáveis pelo manipulador
 - **Espaço Destro**
 - Volume do espaço de trabalho definido por todos os pontos alcançáveis pelo manipulador em todas as orientações possíveis
 - **Espaço Alcançável**
 - Volume do espaço de trabalho definido por todos os pontos alcançáveis pelo manipulador com pelo menos uma orientação.

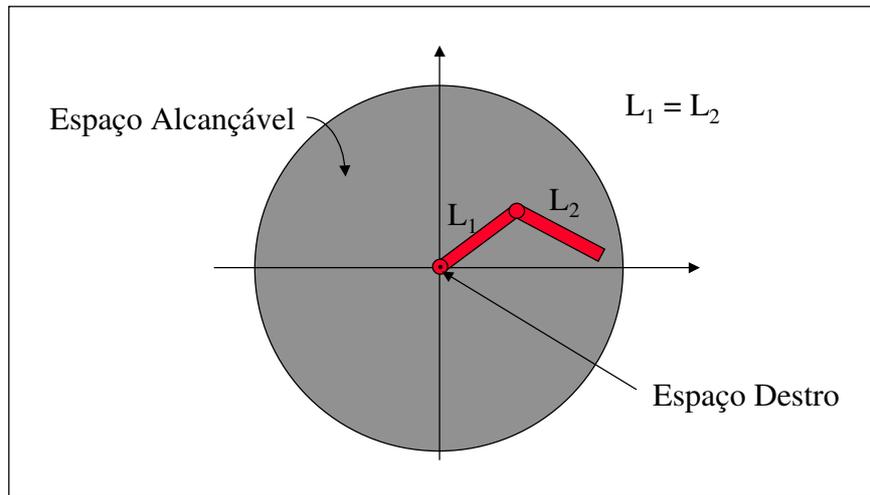
Existência de Soluções



Existência de Soluções

- ◆ Na figura a seguir, $L_1 = L_2$, o espaço alcançável é um círculo de raio $r = 2L_1$.
- ◆ O espaço destre restringe-se a um único ponto, a origem.

Existência de Soluções



©1998Mario Campos

9

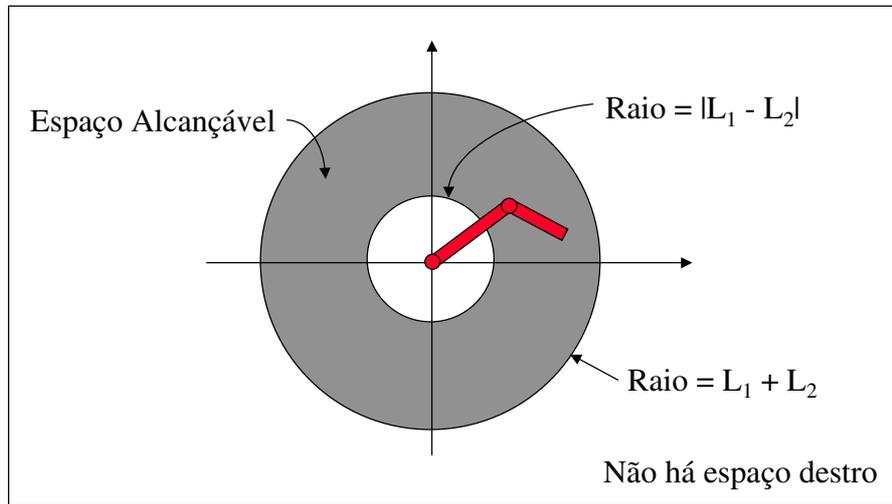
Existência de Soluções

- ◆ Na figura a seguir, $L_1 \neq L_2$, o espaço de trabalho alcançável é um uma coroa, cujo raio menor é $|L_1 - L_2|$ e o raio maior é definido por $L_1 + L_2$.
- ◆ Dentro do espaço alcançável, existem duas orientações possíveis. No limite deste espaço, há apenas uma.
- ◆ Observe que *não* há espaço destro.

©1998Mario Campos

10

Existência de Soluções



©1998Mario Campos

11

Existência de Soluções

- ◆ O espaço de trabalho alcançável, no caso real, seria menor, uma vez que as juntas possuem limites.
- ◆ Na figura anterior, se θ_1 puder assumir todos os valores entre 0 e 360 graus, mas $0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$, o espaço alcançável é o mesmo, porém apenas uma orientação é possível em cada ponto.

©1998Mario Campos

12

Existência de Soluções

- ◆ Quando um manipulador possui menos do que seis graus de liberdade, ele não poderá alcançar posições e orientações arbitrárias no espaço 3D.
- ◆ O espaço de trabalho desses manipuladores é um *subconjunto* de um *sub-espaço* que pode ser associado a um manipulador qualquer.
- ◆ O espaço de trabalho também depende da transformação do referencial da ferramenta, uma vez que é a sua ponta que alcançará os pontos do espaço.

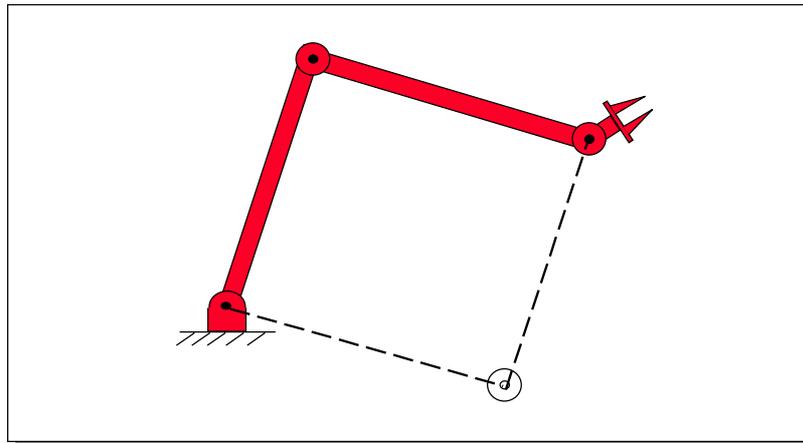
Existência de Soluções

- ◆ Sempre se considera o espaço de trabalho do pulso $\{W\}$. Para cada órgão terminal, o referencial da ferramenta é definido $\{T\}$. Dado um determinado alvo, $\{G\}$, o referencial $\{W\}$ é calculado. Verifica-se, então, se a orientação e a posição de $\{W\}$ encontra-se no espaço de trabalho. Se estiver, pelo menos uma solução existirá.
- ◆ O usuário pensa em termos de $\{T\}$, e computacionalmente falando, pensamos em $\{W\}$.

Soluções Múltiplas

- ◆ Um braço planar, com 3 graus de liberdade (juntas revolutas) pode possuir um grande espaço de trabalho deste, desde que os elos tenham comprimento adequado e as juntas possuam boa faixa de trabalho.
- ◆ Na figura a seguir, pode-se observar que existem duas configurações distintas, com a garra na mesma posição e orientação.
- ◆ O critério na escolha da solução varia, mas uma escolha razoável seria a solução mais *próxima*.

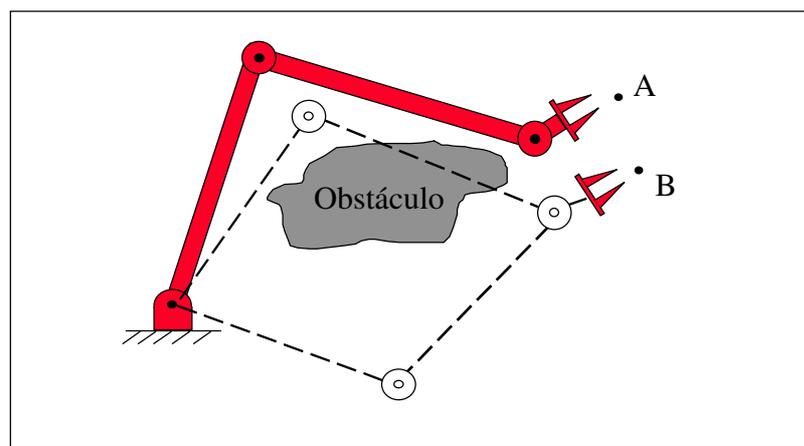
Soluções Múltiplas



Soluções Múltiplas

- ◆ Na figura a seguir, a melhor solução seria aquela em que minimizam a quantidade que as juntas do manipulador tenham que se mover. Se não houvesse o obstáculo, a configuração superior seria escolhida.
- ◆ Uma das entradas para o cálculo da cinemática inversa é, portanto, a posição corrente do manipulador.
- ◆ Mais *próxima* pode significar que a atuação em elos menores sejam escolhidos em vez de elos maiores.

Soluções Múltiplas



Soluções Múltiplas

- ◆ A quantidade de soluções depende da quantidade de juntas, mas também é função dos parâmetros de elo (α_i , a_i e d_i para juntas revolutas) e dos limites de movimento das juntas.
- ◆ Na figura a seguir, vê-se que o PUMA 560 pode alcançar alguns alvos em quatro configurações distintas.

Soluções Múltiplas

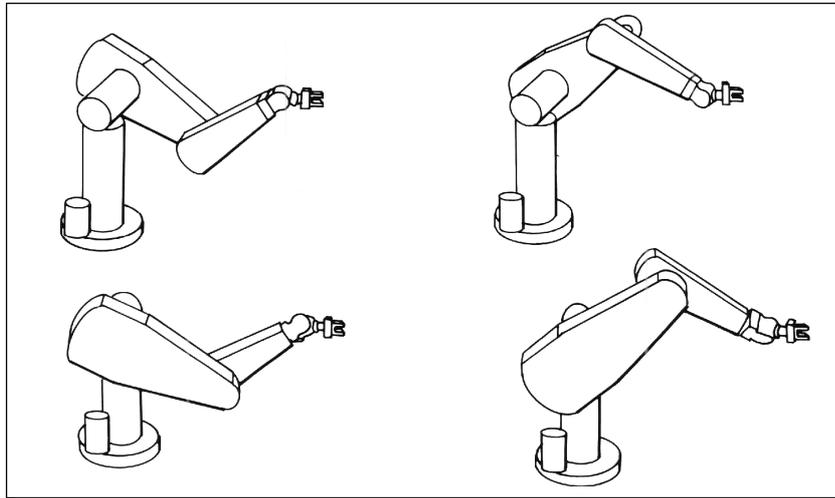
- ◆ Para cada uma das soluções existe uma outra alternativa, na qual as últimas três juntas alternam para uma outra configuração segundo das fórmulas e produzindo oito configurações possíveis:

$$\theta'_4 = \theta_4 + 180^\circ$$

$$\theta'_5 = -\theta_5$$

$$\theta'_6 = \theta_6 + 180^\circ$$

Soluções Múltiplas



©1998Mario Campos

21

Soluções Múltiplas

- ◆ A tabela abaixo mostra como o número de soluções possíveis está relacionado a quantidade de parâmetros de comprimento de elo, a_i , que são iguais a zero.

a_i	Número de Soluções
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	≤ 4
$a_3 = a_5 = 0$	≤ 8
$a_3 = 0$	≤ 16
Todos $a_i \neq 0$	≤ 16

©1998Mario Campos

22

Métodos de Solução

- ◆ Não existem algoritmos gerais que resolvem equações não-lineares.
- ◆ Um manipulador é considerado *solúvel* se as variáveis de junta são determináveis por um algoritmo que calcula *todos* os conjuntos de de variáveis de junta associadas com uma certa posição e orientação.
- ◆ Duas classes de soluções:
 - Soluções fechadas
 - Soluções numéricas — muito mais lentas

Métodos de Solução

- ◆ Soluções fechadas, neste contexto, são aquelas cujos métodos são baseados em expressões analíticas ou na solução de um polinômio de grau menor ou igual a 4. Serão considerados dois métodos:
 - Algébricos
 - Geométricos
- ◆ Esses métodos se distinguem apenas na abordagem.

Métodos de Solução

- ◆ *Todos os sistemas com juntas revolutas ou prismáticas, possuindo um total de seis graus de liberdade em uma única cadeia cinemática são solúveis.*
- ◆ Essa solução geral, entretanto, é numérica
- ◆ Robôs com 6 dof que possuem solução analítica ou fechada, são caracterizados por diversas juntas que se interceptam e/ou muitos α_i iguais a $\pm 90^\circ$

Métodos de Solução

- ◆ Condição suficiente para que um manipulador com 6 dof tenha solução fechada é que três eixos adjacentes se interceptem em um ponto.
- ◆ Quase todos os manipuladores com seis graus de liberdade, hoje, atendem esse requisito.
- ◆ PUMA 560 – eixos 4,5 e 6 se interceptam.

Subespaço do robô para $n < 6$

- ◆ O espaço alcançável de um manipulador com n dof, onde $n < 6$, é uma porção do **subespaço** de n graus de liberdade.
 - Ex.: o subespaço de um manipulador planar de 2 elos é um plano, mas o espaço de trabalho é um subconjunto desse plano.

Subespaço do robô para $n < 6$

- ◆ Uma das maneiras de se especificar o subespaço de um manipulador de n dof, é fornecer uma expressão para o referencial de pulso $\{W\}$, ou de ferramenta $\{T\}$, em função das n variáveis. O subespaço é produzido quando as variáveis tomam todos os valores possíveis.

Subespaço do robô para $n < 6$

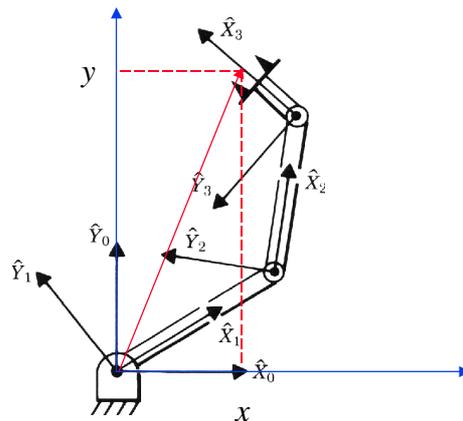
◆ Exemplo:

Dar a descrição do subespaço de ${}^B_W T$ para o manipulador de 3 elos da figura a seguir.

$${}^B_W T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde, x e y são as coordenadas da posição, e ϕ descreve a orientação do elo terminal.

Subespaço do robô para $n < 6$



Subespaço do robô para $n < 6$

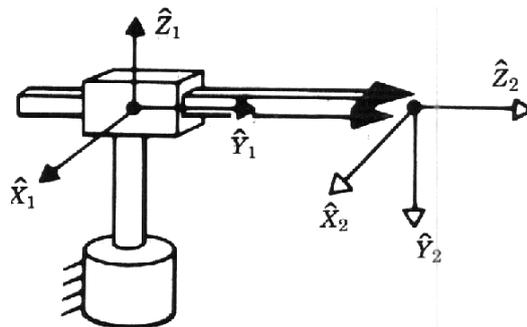
◆ Exemplo:

Dar a descrição do subespaço de 0_2T para o manipulador polar com 2 dof mostrado na figura a seguir.

$${}^0P_{2ORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Onde x e y podem assumir quaisquer valores.

Subespaço do robô para $n < 6$



Subespaço do robô para $n < 6$

- ◆ A orientação é restrita pois o eixo ${}^0\hat{Z}_2$ deve apontar na direção que depende de x e y . O eixo ${}^0\hat{Y}_2$ sempre aponta para baixo, e o eixo ${}^0\hat{X}_2$ pode ser calculado através do produto vetorial ${}^0\hat{Y}_2 \times {}^0\hat{Z}_2$.

$${}^0\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Subespaço do robô para $n < 6$

- ◆ O subespaço é calculado por:

$${}^0_2T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x \\ \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 & \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Subespaço do robô para $n < 6$

- ◆ Geralmente, quando se define um um alvo para um manipulador de n dof, utiliza-se n parâmetros para especificar este alvo.
- ◆ Por outro lado, se especificarmos o alvo com 6 dof, em geral não será possível alcançar aquele alvo com um manipulador com $n < 6$ dof.

Subespaço do robô para $n < 6$

- ◆ Uma estratégia para especificar *alvos genéricos* para um manipulador com menos de 6 dof:
 1. Dado um referencial do alvo, $s_{...}$, calcular um referencial alvo modificado, $s_{...}$, de forma que $s_{...}$ pertença ao subespaço do manipulador e esteja tão *próximo* a $s_{...}$ quanto for possível.
 2. Calcular a cinemática inversa para encontrar os valores de juntas utilizando $s_{...}$ como o alvo desejado. Este ponto pode ainda não estar no espaço do manipulador.

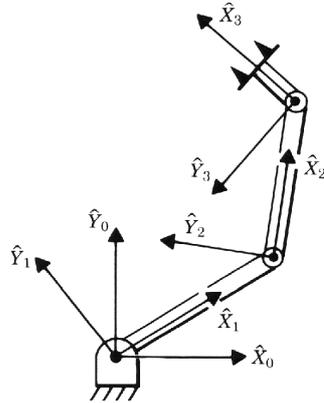
Algébrica x Geométrica

- ◆ Existem alguns métodos de se calcular a cinemática inversa de manipuladores:
 - Transformada inversa
 - Álgebra de *parafuso*
 - Matrizes duais
 - Quatérnios duais
 - Iterativo
 - Geométrico

Solução Algébrica

- ◆ A solução algébrica busca determinar a cinemática inversa a partir das equações de transformação e da descrição do posição e orientação que se deseja alcançar.
- ◆ A seguir, um exemplo mostra esse método para o manipulador mostrado na próxima figura.

Solução Algébrica



Solução Algébrica

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

Solução Algébrica

Utilizando o método descrito anteriormente para cinemática direta, utilizando-se os parâmetros da tabela anterior, define-se a equação cinemática do braço:

$${}^B_W T = {}^0_3 T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0.0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0.0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução Algébrica

- ◆ O fato de se tratar de um manipulador planar, o alvo pode ser mais facilmente especificado com 3 valores: x , y e ϕ , que descrevem a orientação do elo 3 no plano. Ou seja, ${}^B_W T$ pode ser descrita através de uma estrutura mais genérica:

$${}^B_W T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução Algébrica

◆ Igualando-se as duas equações, tem-se que:

$$c_\phi = c_{123}$$

$$s_\phi = s_{123}$$

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

Solução Algébrica

Resolvendo, temos que:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2,$$

e para c_2

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

o lado direito da equação acima ter valor entre -1 e +1

Solução Algébrica

Assumindo que o alvo está no espaço de trabalho, pode-se escrever a expressão de s_2 :

$$s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$$

portanto,

$$\theta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

Solução Algébrica

Pode-se, agora, calcular θ_1 :

$$x = k_1c_1 - k_2s_1$$

$$y = k_1s_1 + k_2c_1$$

onde

$$k_1 = l_1 + l_2c_2$$

$$k_2 = l_2s_2$$

se

$$r = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad \text{e} \quad \gamma = \text{Atan2}(k_2, k_1)$$

Solução Algébrica

então

$$k_1 = r \cos \gamma$$

$$k_2 = r \sin \gamma$$

Pode-se escrever

$$\frac{x}{r} = \cos \gamma \cos \theta_1 - \sin \gamma \sin \theta_1$$

$$\frac{y}{r} = \cos \gamma \sin \theta_1 + \sin \gamma \cos \theta_1$$

Solução Algébrica

ou

$$\cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{r}$$

$$\sin(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{r}$$

tem-se ainda que

portanto

$$\gamma + \theta_1 = \text{Atan2}\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \text{Atan2}(y, x)$$

Solução Algébrica

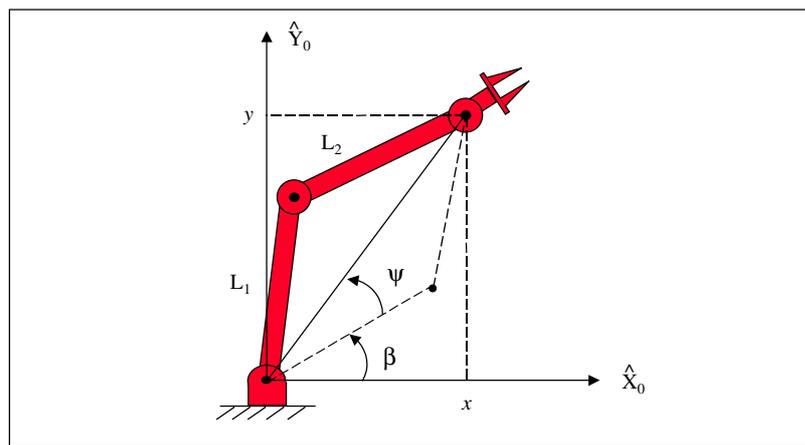
Finalmente, θ_3 pode ser calculado a partir da soma:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{Atan2}(s_\phi, c_\phi) = \phi$$

Solução Geométrica

- ◆ A abordagem geométrica envolve decompor o problema de geometria espacial do manipulador em vários problemas de geometria plana.
- ◆ A figura a seguir mostra o triângulo formado por l_1 , l_2 e a reta que liga o referencial da origem $\{O\}$ com a origem do referencial $\{3\}$. (As linhas tracejadas mostram a outra solução).

Solução Geométrica



©1998Mario Campos

51

Solução Geométrica

Aplicando a lei dos cosenos:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(180^\circ + \theta_2)$$

Uma vez que $\cos(180 + \theta_2) = -\cos(\theta_2)$, tem-se que:

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

©1998Mario Campos

52

Solução Geométrica

Para que este triângulo exista, é necessário que o alvo $\sqrt{x^2 + y^2}$ seja menor ou igual à soma dos comprimentos dos elos, $l_1 + l_2$. A equação anterior é resolvida para o valor de θ_2 que esteja entre 0 e -180.

Para resolver para θ_1 , tem-se de encontrar expressões para os ângulos ψ e β :

$$\beta = \text{Atan2}(y, x)$$

$$\cos\psi = \frac{x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Solução Geométrica

Para que a geometria seja preservada, o arco deve ter solução de forma que $0 \leq \Psi \leq 180^\circ$. Tem-se que:

$$\theta_1 = \beta \pm \Psi$$

onde o sinal “+” é usado quando $\theta_2 < 0$, e “-” quando $\theta_2 > 0$. Finalmente, tem-se o valor de θ_3 calculado a partir de:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi$$

Exemplos de cinemática inversa

- O PUMA560
- O Yaskawa Motoman L3