
Cinemática de Manipuladores

Introdução

◆ CINEMÁTICA

- Ciência que estuda os movimentos de um corpo abstraindo das forças que causaram tais movimentos.
- São estudadas a *posição*, *velocidade*, *aceleração* e outras derivadas de mais alta ordem das variáveis de posição (com relação ao *tempo* ou a qualquer outra variável)

Introdução

◆ DINÂMICA

- Estuda o relacionamento entre movimentos e as forças e torques que os causaram.
- Em particular, no caso de manipuladores, procura-se estudar dois problemas:
 - » Dado a trajetória de um ponto em termos de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ encontrar o vetor de torques de junta τ .
 - » Dado o vetor de torques nas juntas τ , calcular o movimento resultante do manipulador em termos de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$

Introdução

◆ CINEMÁTICA DIRETA

- Calcular a posição do órgão terminal do manipulador em função das variáveis de junta.

Descrição de Elos – Definições

◆ **Corpo Rígido**

- Entidade física cuja forma e dimensões (tamanho), não se alteram, ou seja, as distâncias relativas entre as partículas que o compõe não se alteram.
- Na prática, um corpo é considerado como sendo rígido quando os movimentos e deformações intrínsecas ao mesmo são desprezíveis comparado ao movimento total do corpo.

Descrição de Elos – Definições

◆ **Mecanismo**

- qualquer meio que transmita, controle ou restrinja o movimento de um corpo rígido.

◆ **Máquina**

- combinação de um conjunto de mecanismos discretos.

◆ **Elos**

- corpos rígidos que se interligam para compor um mecanismo

◆ **Juntas**

- são *pontos, linhas ou superfícies de contato* entre corpos rígidos.

Descrição de Elos – Definições

- ◆ **Par Cinemático**

- é formado quando *dois* corpos rígidos estão ligados por uma junta.

- ◆ **Elemento de um Par Cinemático**

- cada uma das superfícies de um par cinemático.

- ◆ **Conexão ou acoplamento**

- ligação de pares cinemáticos em série ou em paralelo.

Descrição de Elos – Definições

- ◆ **Pares Cinemáticos**

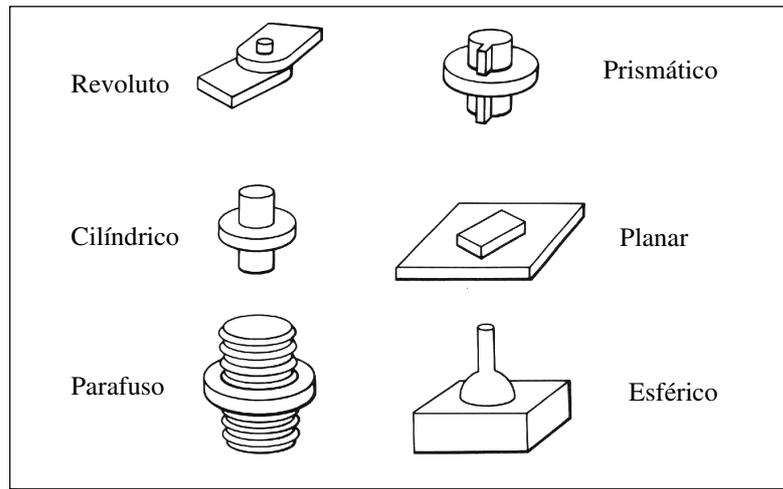
- *Par Alto* – qualquer par cinemático onde os elementos do par sejam: um *ponto*, uma *linha reta* ou uma *linha curva*.

- *Par Baixo* – são juntas de contato entre corpos rígidos cujos elementos são *superfícies*.

- ◆ **“Linkage”**

- mecanismo onde todas as juntas são pares baixos.

Descrições de Elos – Pares Baixos



©1988 Mario Campos

9

Descrição de Elos

◆ Manipuladores

- composto de juntas com um grau de liberdade (1 d.o.f.), em geral *revolutas* ou *prismáticas*.

◆ Numeração dos elos

- a partir da base (elo 0); o primeiro corpo móvel e denominado elo 1, e assim sucessivamente

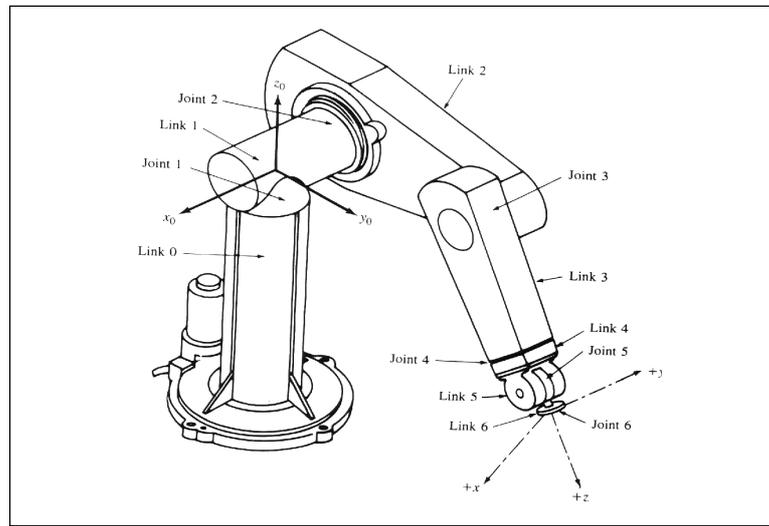
◆ Elo

- Corpo rígido que define a relação entre dois eixos de juntas adjacentes de um manipulador

©1988 Mario Campos

10

Descrição de Elos – Exemplo



©1988 Mario Campos

11

Descrição de Elos

◆ Eixo de uma junta

- definidos por linhas no espaço 3D, ou um vetor direcional.
- O *eixo da junta i* , é o eixo no espaço 3D em torno do qual o *elo i* gira em relação ao *elo $i - 1$* .
- Um elo pode ser definido por *dois* números que definem a localização relativa dos dois eixos no espaço.

©1988 Mario Campos

12

Descrição de Elos

◆ Comprimento do elo — a_{i-1}

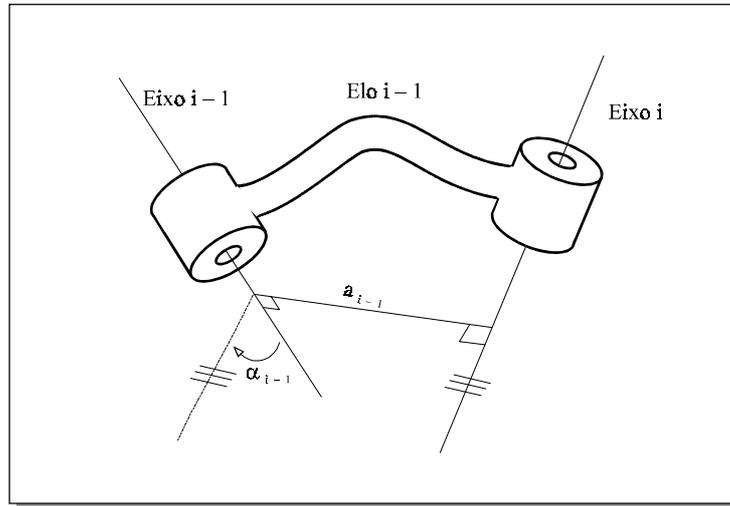
- Para quaisquer dois eixos no espaço 3D, existe uma medida bem definida de distância entre eles, que é medida sobre a reta que lhes é mutuamente perpendicular. Essa perpendicular mútua sempre existe, e é única, a não ser no caso de eixos paralelos, quando existirão infinitas perpendiculares de comprimento idêntico.

Descrição de Elos

◆ Torção do Elo — α_{i-1}

- Em um plano normal à reta mutuamente perpendicular, e que contém o eixo $i-1$, projeta-se a imagem do eixo i . O ângulo, medido a partir de $i-1$ até a projeção de i , no esquema da “mão direita”, é denominado α_{i-1} .
- Quando os eixos se interceptam, a torção é medida no plano que contém os dois eixos, mas o sentido de α_{i-1} é perdido. Neste caso especial o sinal de α_{i-1} é arbitrário.

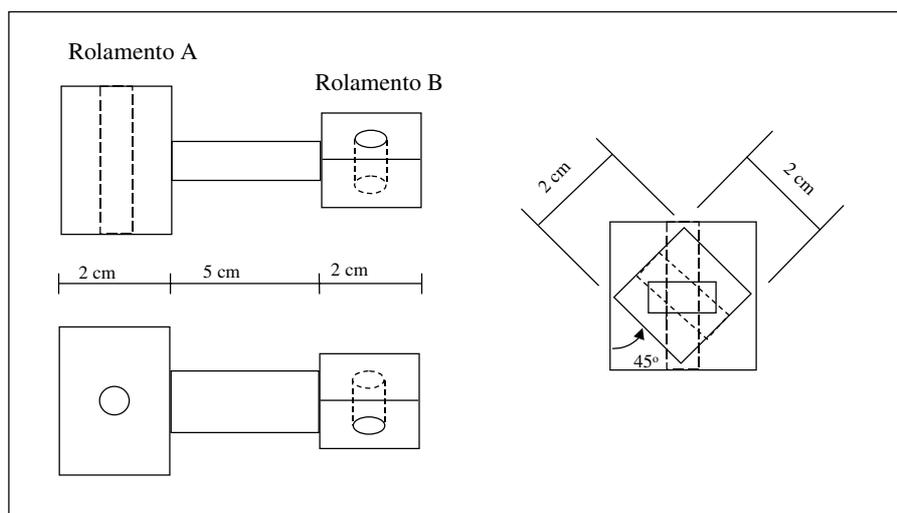
Descrição de Elos



©1988 Mario Campos

15

Descrição de Elos – Exemplo



©1988 Mario Campos

16

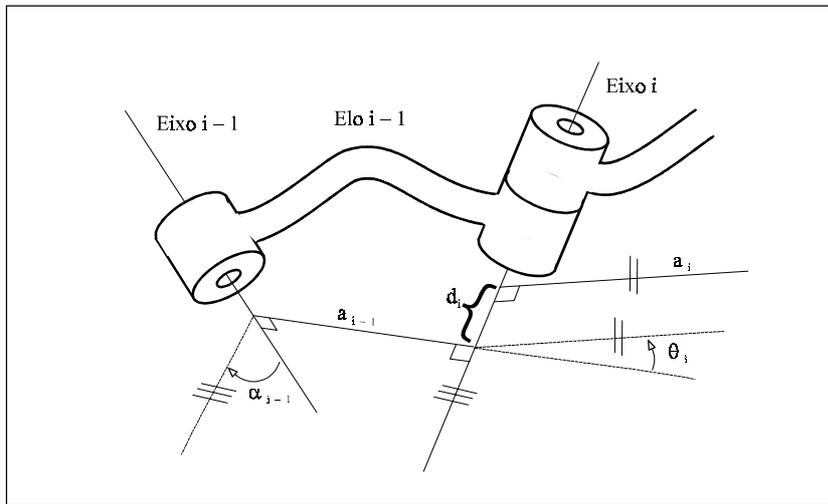
Descrição da conexão entre elos

- ◆ A conexão entre elos em um manipulador envolve vários aspectos como a robustez da junta, a lubrificação, rolamentos e montagem das engrenagens. No caso da cinemática podemos abstrair desses aspectos, e concentrar em apenas dois parâmetros que especificarão a interconexão entre elos de maneira completa.

Descrição da conexão entre elos

- ◆ **Elos intermediários na cadeia cinemática**
 - Um dos parâmetros, o *offset do elo*, denominado d_i , descreve a distância (com sinal), sobre o eixo i , entre as duas perpendiculares comuns dos dois elos. Esta também é a variável de junta para o caso de junta prismática.
 - O segundo parâmetro, *o ângulo de junta*, denominado θ_i , descreve a rotação relativa entre os dois elos. É a variável de junta para o caso de junta revoluta.

Descrição da conexão entre elos



©1988 Mario Campos

19

Descrição da conexão entre elos

◆ Elos inicial e final

- O comprimento do elo, a_i , e a torção do elo, α_i , dependem dos eixos das juntas i e $i + 1$. No final da cadeia cinemática, convencionou-se que o valor desses parâmetros é zero. Ou seja, $a_0 = a_n = 0.0$ e $\alpha_0 = \alpha_n = 0.0$ graus.
- O offset do elo d_i , e o ângulo entre juntas, θ_i , são bem definidos para $i = 2$ a $i = n - 1$. Se a junta 1 for revoluta, a posição para o zero de θ_1 pode ser escolhida arbitrariamente, e convencionou-se que $d_1 = 0.0$. Se a junta 1 for prismática, a posição para o zero de d_1 pode ser escolhida arbitrariamente, e convencionou-se que $\theta_1 = 0.0$.
- O mesmo se aplica para a junta n

©1988 Mario Campos

20

Descrição da conexão entre elos

- ◆ Notação de *Denavit-Hartenberg*
 - Um robô pode ser descrito, cinematicamente, através de apenas 4 parâmetros:
 - » 2 descrevem o elo
 - » 2 descrevem a conexão do elo com os adjacentes
 - Esta convenção é denominada Denavit-Hartenberg
 - Um robô com 6 d.o.f. revolutos requer 18 parâmetros (seis conjuntos a_i, α_i, d_i)

Descrição da conexão entre elos

- ◆ Exemplo
 - Assuma que dois elos como os mostrados na figura da página 16 estão conectados de maneira que as superfícies planas dos rolamentos A e B esteja justapostas. Qual o valor de d_2 ?
 - Resposta: 2.5 cm.

Afixando referenciais aos elos

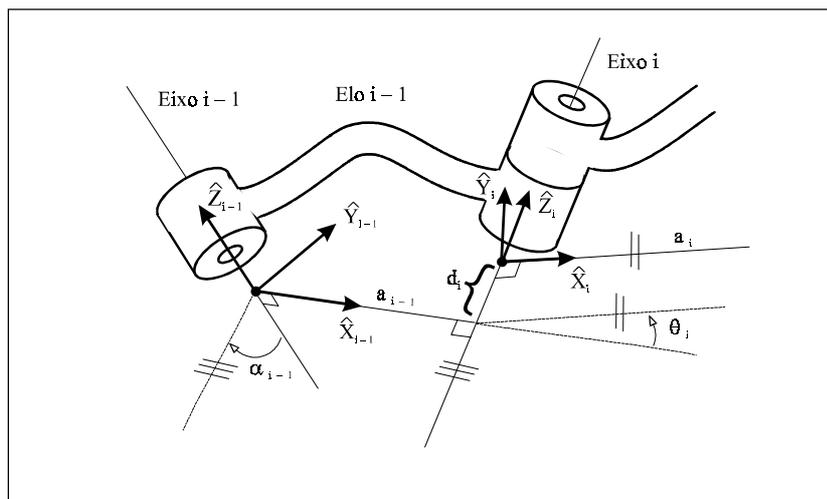
◆ Convenção

- Os referenciais são denominados segundo o número de cada elo, ao qual está fixado. Ou seja, o referencial $\{i\}$ está firmemente afixado ao elo i .

◆ Elos intermediários na cadeia

- O eixo \hat{Z} do referencial $\{i\}$ é coincidente com o eixo i .
- A origem do referencial é locado onde a perpendicular comum intercepta o eixo i .
- \hat{X}_i aponta na direção da junta $i + 1$.
- Caso $a_i = 0.0$, \hat{X}_i é normal ao plano de \hat{Z}_i e \hat{Z}_{i+1} .
- Define-se α_i segundo a regra da mão direita em torno de \hat{X}_i

Afixando referenciais aos elos



Afixando referenciais aos elos

◆ Primeiro elo da cadeia cinemática

- Afixa-se um referencial à base do robô, denominando-o de referencial $\{0\}$. Como esse referencial não muda, pode ser considerado um *frame* de referência.
- Orienta-se \hat{Z}_0 ao longo do eixo 1 do referencial $\{0\}$, que por sua vez é posicionado de forma coincidente com o referencial $\{1\}$, quando o valor da variável da junta 1 é zero.
- Utilizando essa convenção, sempre teremos $a_0 = 0.0$, $\alpha_0 = 0.0$. Isso também garante que $d_1 = 0.0$ se a junta 1 for revoluta, e $\theta_1 = 0.0$ se a junta 1 for prismática.

Afixando referenciais aos elos

◆ Último elo da cadeia cinemática

- Se a junta n for revoluta, a direção de \hat{X}_N é escolhida de forma que seja alinhada com \hat{X}_{N-1} quando $\theta_n = 0.0$, e a origem do referencial $\{N\}$ é escolhida de forma que $d_n = 0.0$.
- Para junta n prismática, a direção de \hat{X}_N é escolhida de forma que $\theta_n = 0.0$, e a origem do referencial $\{N\}$ é posicionada na intersecção de \hat{X}_{N-1} e o eixo da junta n quando $d_n = 0.0$.

Afixando referenciais aos elos

◆ Resumo dos parâmetros de elos

a_i — distância entre \hat{Z}_i e \hat{Z}_{i+1} , medida ao longo de \hat{X}_i ;

α_i — ângulo entre \hat{Z}_i e \hat{Z}_{i+1} , medido em torno de \hat{X}_i ;

d_i — distância entre \hat{X}_{i-1} e \hat{X}_i , medido ao longo de \hat{Z}_i ;

θ_i — ângulo entre \hat{X}_{i-1} e \hat{X}_i , medido em torno de \hat{Z}_i .

- Escolhe-se $a_i > 0$, já que corresponde a uma distância, e α_i , d_i , e θ_i são quantidades com sinal.

Afixando referenciais aos elos

◆ Resumo do procedimento

1. Identificar os eixos das juntas e imaginar retas infinitas alinhadas com eles. Nos passos 2 a 5, considere duas retas como estas passando pelos eixos i e $i+1$.
2. Identificar a perpendicular ou ponto de intersecção comum aos dois eixos. Afixe a origem do referencial do elo no ponto de intersecção dos eixos ou onde a perpendicular comum entre eles interceptar o eixo i .

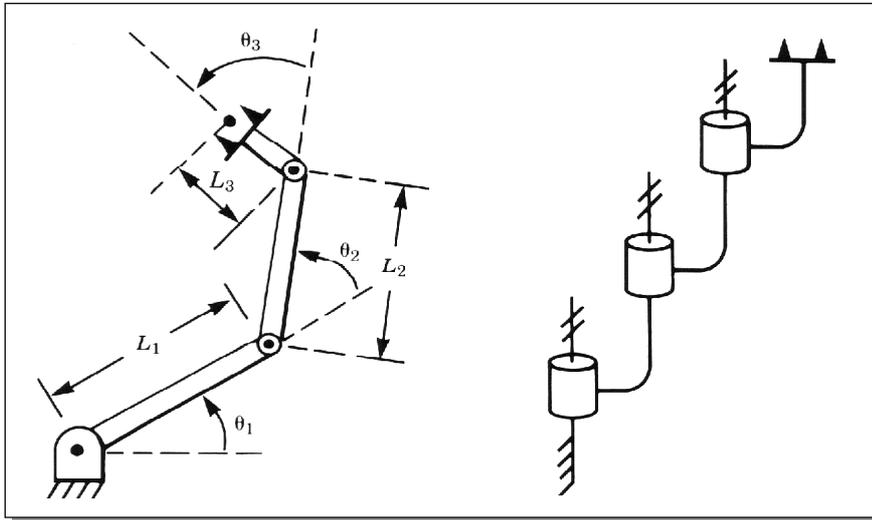
Afixando referenciais aos elos

3. Assinalar o eixo \hat{Z}_i colinear com o eixo da junta i .
4. Assinalar o eixo \hat{X}_i colinear com a perpendicular comum, ou se os eixos se interceptarem, assinalar \hat{X}_i de forma a que seja normal ao plano que contém os dois eixos.
5. Assinalar o eixo \hat{Y}_i de forma a completar o referencial segundo a “regra da mão direita”.
6. Assinalar $\{0\}$ de forma a coincidir $\{1\}$ quando a variável da primeira junta for zero. Escolher para $\{N\}$ a localização de sua origem e escolha \hat{X}_N livremente, mas de forma a fazer com que a maioria dos parâmetros de elo sejam zero

Afixando referenciais aos elos

- ◆ Exemplo:
 - O manipulador da figura a seguir é chamado de mecanismo do tipo “RRR” (3 R). Ao lado está a representação esquemática do mesmo. Assinalar referenciais aos elos, e definir os parâmetros de Denavit-Hartenberg do mesmo.

Afixando referenciais aos elos



©1988 Mario Campos

31

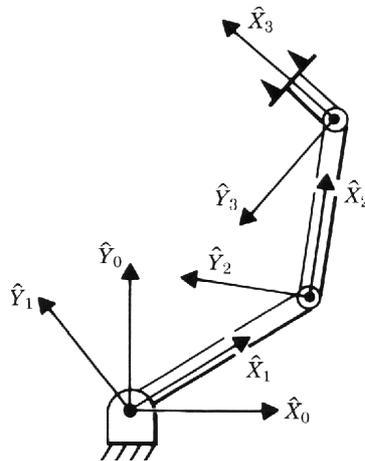
Afixando referenciais aos elos

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

©1988 Mario Campos

32

Afixando referenciais aos elos



©1988 Mario Campos

33

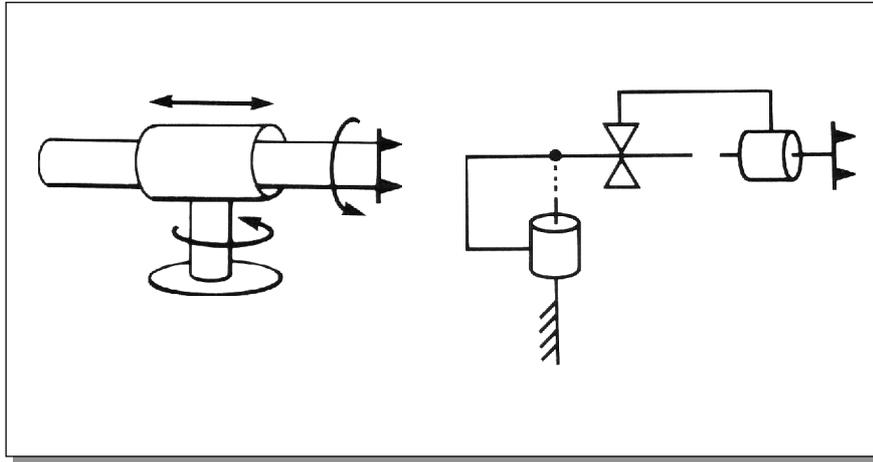
Afixando referenciais aos elos

- ◆ Na figura a seguir temos um manipulador do tipo *RPR*, que indica o tipo e a ordem das conexões de suas juntas. O ponto no diagrama esquemático é usado para indicar onde o ponto onde dois eixos adjacentes se interceptam.

©1988 Mario Campos

34

Afixando referenciais aos elos



©1988 Mario Campos

35

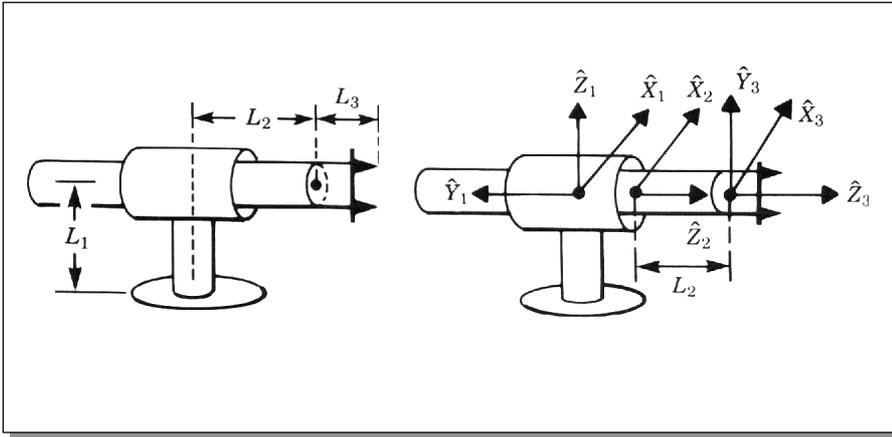
Afixando referenciais aos elos

- ◆ Temos, na figura a seguir, o posicionamento final dos referenciais nos elos.
- ◆ Observe que θ_2 é zero para este robô, e que d_2 é a variável de junta.
- ◆ Os eixos 1 e 2 se interceptam, o que faz com que a_1 seja zero.
- ◆ O ângulo α_1 deve ser de 90°

©1988 Mario Campos

36

Afixando referenciais aos elos



Afixando referenciais aos elos

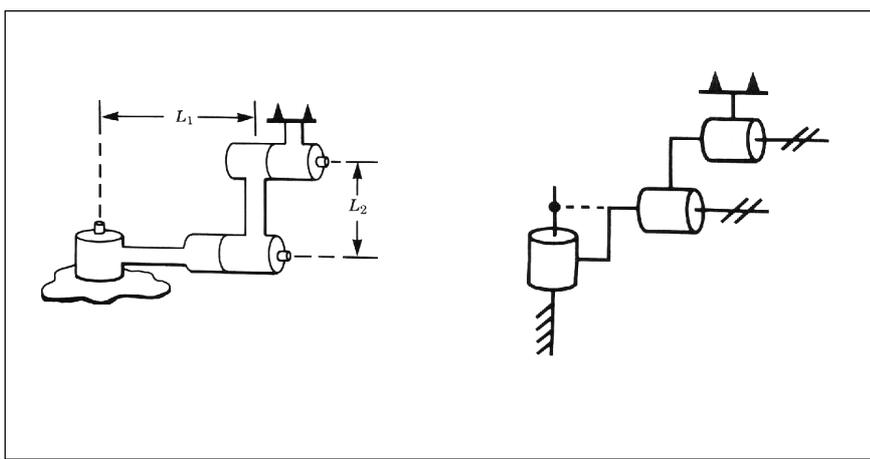
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

Afixando referenciais aos elos

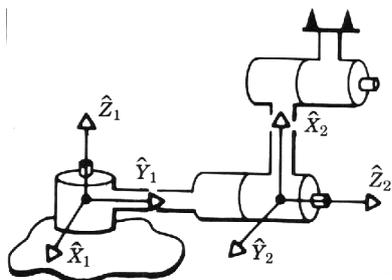
◆ Exemplo

A figura a seguir mostra um manipulador de 3 elos do tipo RRR, no qual os eixos das juntas 1 e 2 se interceptam, e os eixos 2 e 3 são paralelos. Demonstrar a multiplicidade de soluções para assinalamento dos parâmetros Denavit-Hartenberg.

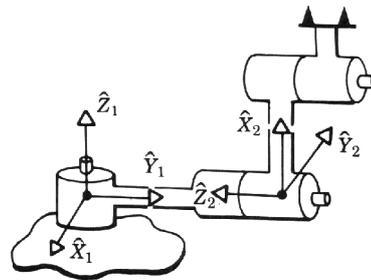
Afixando referenciais aos elos



Afixando referenciais aos elos

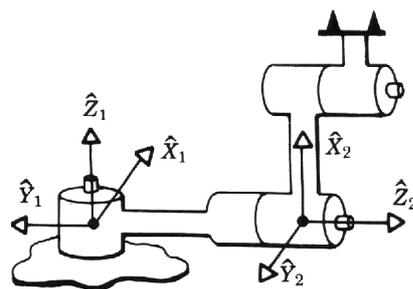


$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = L_2 \\ \alpha_1 = -90^\circ & \alpha_2 = 0 \quad \theta_2 = -90^\circ \\ d_1 = 0 & d_2 = L_1 \end{array}$$

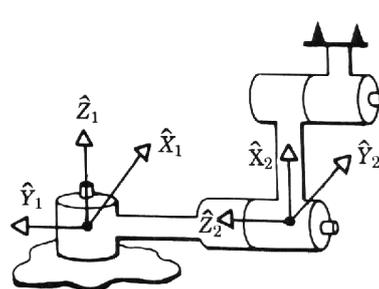


$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = L_2 \\ \alpha_1 = 90^\circ & \alpha_2 = 0 \quad \theta_2 = 90^\circ \\ d_1 = 0 & d_2 = -L_1 \end{array}$$

Afixando referenciais aos elos



$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = L_2 \\ \alpha_1 = 90^\circ & \alpha_2 = 0 \quad \theta_2 = 90^\circ \\ d_1 = 0 & d_2 = L_1 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = L_2 \\ \alpha_1 = -90^\circ & \alpha_2 = 0 \quad \theta_2 = -90^\circ \\ d_1 = 0 & d_2 = -L_1 \end{array}$$

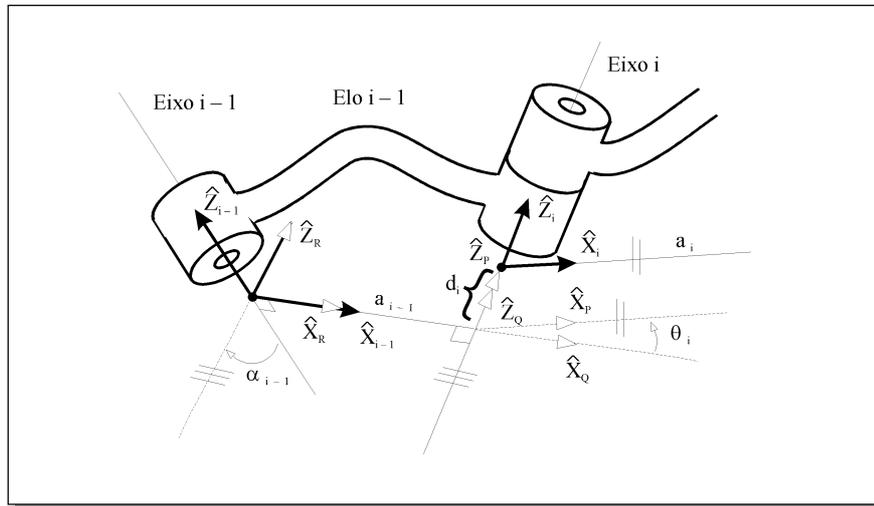
Cinemática de Manipuladores

- ◆ Objetivo é derivar a forma geral da transformação que relaciona os referenciais afixados em elos adjacentes.
- ◆ Posteriormente, essas transformações individuais serão concatenadas para calcular a posição e orientação do elo n em relação ao elo 0 .

Cinemática de Manipuladores

- ◆ Derivando as transformações de elos
 - Deseja-se determinar a transformação que define o referencial $\{i\}$ em relação ao referencial $\{i-1\}$.
 - No caso geral essa transformação será função dos quatro parâmetros de elos.
 - Para qualquer robô, essa transformação será função de apenas uma variável, sendo que os outros parâmetros serão fixos e determinados pelo projeto mecânico.
 - Determina-se, para isso, três referenciais intermediários: $\{P\}$, $\{Q\}$ e $\{R\}$.

Cinemática de Manipuladores



©1988 Mario Campos

45

Cinemática de Manipuladores

- ◆ A figura anterior mostra o mesmo par de juntas, apenas com os referenciais $\{P\}$, $\{Q\}$ e $\{R\}$ definidos.
- ◆ $\{R\}$ difere de $\{i-1\}$ de uma rotação de α_{i-1} ;
- ◆ $\{Q\}$ difere de $\{R\}$ de uma translação a_{i-1} ;
- ◆ $\{P\}$ difere de $\{Q\}$ de uma rotação de θ_i ;
- ◆ $\{i\}$ difere de $\{P\}$ de uma translação d_i .

©1988 Mario Campos

46

Cinemática de Manipuladores

Para transformar-se um vetor no referencial $\{i\}$ para sua descrição no referencial $\{i-1\}$, pode-se escrever:

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}R_T \begin{matrix} R_T \\ Q_T \\ P_T \end{matrix} {}^P_i T {}^iP$$

ou

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}{}_i T {}^iP$$

onde

$${}^{i-1}{}_i T = {}^{i-1}R_T \begin{matrix} R_T \\ Q_T \\ P_T \end{matrix} {}^P_i T$$

Cinemática de Manipuladores

A equação anterior pode ser escrita:

$${}^{i-1}{}_i T = R_X(\alpha_{i-1}) D_X(a_{i-1}) R_Z(\theta_i) D_Z(d_i)$$

ou

$${}^{i-1}{}_i T = \text{Screw}_X(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Screw}_Z(d_i, \theta_i)$$

Onde a notação $\text{Screw}_Q(r, \phi)$ significa uma translação ao longo do eixo \hat{Q} de uma distância r , e de uma rotação ϕ em torno do mesmo eixo.

Cinemática de Manipuladores

Finalmente, multiplicando-se as transformações, obtém-se:

$${}^{i-1}_i T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_1 c\alpha_{i-1} & c\theta_1 c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_1 s\alpha_{i-1} & c\theta_1 s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática de Manipuladores

◆ Exemplo

Para o manipulador mostrado na página 34, pode-se calcular cada uma das transformações. Para isto, basta substituir os parâmetros do referido manipulador na equação anterior.

O resultado pode ser visto nas equações a seguir.

Cinemática de Manipuladores

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática de Manipuladores

Tendo sido definidos os referenciais e os parâmetros dos elos, pode-se encontrar as equações cinemáticas de maneira fácil. Isso é realiza com a multiplicação das matrizes de transformação de cada elo, de forma que se obtém uma única matriz de transformação que relaciona o referencial $\{N\}$ ao referencial $\{0\}$:

$${}^0_NT = {}^0_1T \quad {}^1_2T \quad {}^2_3T \quad \dots \quad {}^{N-1}_NT$$

Espaço de atuadores, juntas e cartesiano

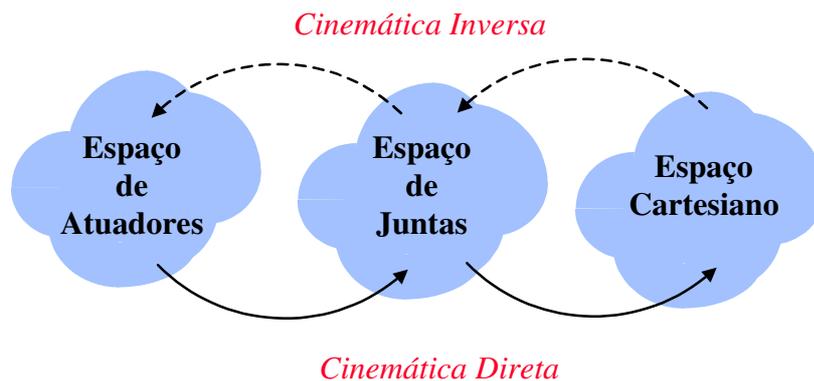
- ◆ **Vetor de juntas** — vetor $n \times 1$ formado pelo conjunto de n variáveis de junta, as quais descrevem a posição de todos os elos de um manipulador de n d.o.f.
- ◆ **Espaço de juntas** — espaço definido por todos os vetores de juntas.
- ◆ **Espaço Cartesiano** — termo utilizado quando a posição é especificada segundo os eixos ortogonais e a rotação é especificada segundo qualquer das convenções especificadas anteriormente. Também denominado **espaço orientado-a-tarefa** ou **espaço operacional**.

Espaço de atuadores, juntas e cartesiano

- ◆ **Vetor de atuadores**—formado pelo conjunto de variáveis de atuadores, utilizadas para descrever o vetor de juntas. Na maioria dos casos, a junta não é atuada diretamente. Pode-se ter, um par de atuadores pode ser utilizado para mover uma única junta. Também pode-se ter um atuador linear para realizar o movimento de rotação de uma junta. Os sensores de posição, em geral, estão localizados nos atuadores.
- ◆ **Espaço de atuadores** — espaço definido por todos os vetores de atuador.

Espaço de atuadores, juntas e cartesiano

Mapeamento entre espaços:



Cinemática de robôs industriais

- ◆ Exemplo de dois manipuladores industriais:
 - **PUMA 560** — 6 d.o.f., juntas rotacionais. Derivação da cinemática direta ao nível do espaço de juntas.
 - **Yaskawa Motoman L3** — 5 d.o.f., juntas rotacionais. Derivação da cinemática direta a partir do espaço de atuadores.

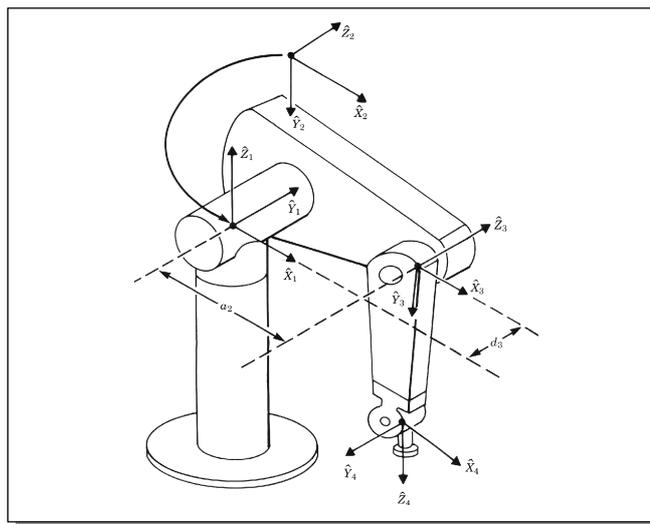
Cinemática de robôs industriais

◆ PUMA 560

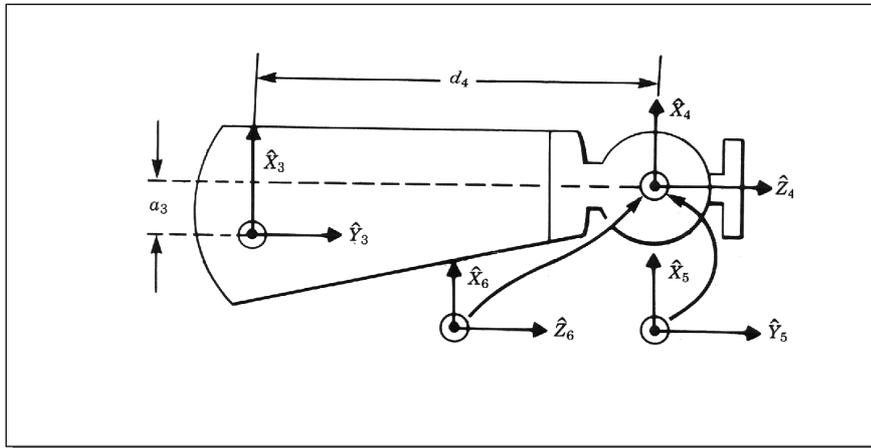
As figuras a seguir mostram o assinalamento de referenciais aos elos do manipulador. Observa-se que os eixos das juntas 4, 5 e 6 interceptam-se em um ponto comum, que também é o ponto onde coincidem as origens dos referenciais {4}, {5} e {6}. Além disso, todas essas juntas são ortogonais.

É importante se observar que por razões construtivas, os movimentos dos elos 4, 5 e 6 são acoplados. Isso implica que a cinemática deve ser calculada em dois passos: espaço de atuadores e posteriormente no espaço de juntas.

Cinemática de robôs industriais



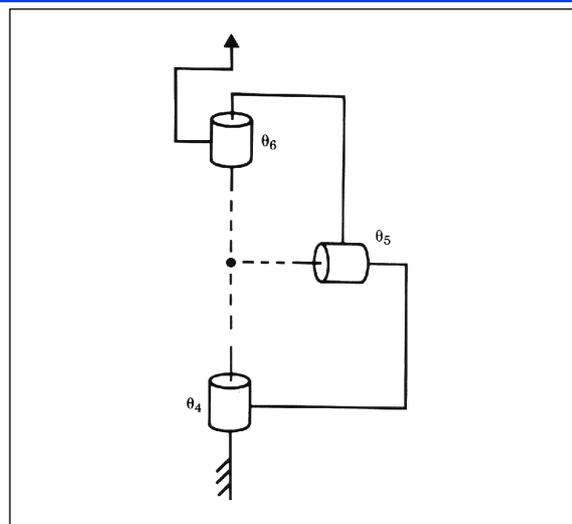
Cinemática de robôs industriais



©1988 Mario Campos

59

Cinemática de robôs industriais



©1988 Mario Campos

60

Cinemática de robôs industriais

Parâmetros dos elos do PUMA 560

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	-90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	-90°	0	0	θ_6

Cinemática de robôs industriais

Transformadas dos elos do PUMA 560

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5_6T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática de robôs industriais

$${}^1_3T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $c_{23} = c_2c_3 - s_2s_3$ e $s_{23} = c_2s_3 + s_2c_3$

$${}^3_6T = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4s_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática de robôs industriais

Temos, multiplicando-se as duas transformações:

$${}^1_6T = {}^1_3T {}^3_6T = \begin{bmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & {}^1p_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & {}^1p_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática de robôs industriais

$${}^1r_{11} = c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - s_{23}s_5s_6 \quad {}^1r_{12} = -c_{23}[c_4c_5c_6 + s_4s_6] + s_{23}s_5s_6$$

$${}^1r_{21} = -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \quad {}^1r_{22} = s_4c_5c_6 - c_4s_6$$

$${}^1r_{31} = s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6 \quad {}^1r_{32} = s_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] - c_{23}s_5s_6$$

$${}^1r_{13} = c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5$$

$${}^1p_x = a_2c_2 + a_2c_3 - d_4s_{23}$$

$${}^1r_{23} = s_4s_5$$

$${}^1p_y = d_3$$

$${}^1r_{33} = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$$

$${}^1p_z = -a_2s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}$$

Cinemática de robôs industriais

Finalmente, tem-se que:

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática de robôs industriais

$$\begin{aligned}r_{11} &= c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5s_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\r_{21} &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5s_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\r_{31} &= s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6 \\r_{12} &= c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) - s_{23}s_5s_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\r_{22} &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) - s_{23}s_5s_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\r_{32} &= -s_{23}[c_4c_5s_6 - s_4c_6] - c_{23}s_5c_6 \\r_{13} &= -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5 \\r_{23} &= -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5 \\r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\p_x &= c_1[a_2c_2 + a_2c_3 - d_4s_{23}] - d_3s_1 \\p_y &= s_1[a_2c_2 + a_2c_3 - d_4s_{23}] - d_3c_1 \\p_z &= -a_2s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}\end{aligned}$$

Cinemática de robôs industriais

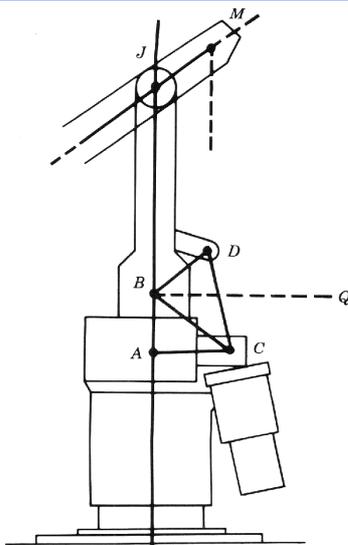
◆ YASKAWA Motoman L-3

Trata-se de um manipulador com 5 d.o.f (5R). Possui uma estrutura cinemática mais complexa, utilizando dois atuadores lineares acoplados aos elos 2 e 3, através de cadeias de 4 barras. Através de, dois atuadores em arranjo diferencial movimentam as juntas 4 e 5.

Cinemática de robôs industriais

- ◆ A figura a seguir mostra o mecanismo que conecta o atuador 2 aos elos 2 e 3 do robô. Trata-se de um atuador linear, que controla o comprimento do segmento DC . O triângulo ABC é fixo, assim como o comprimento BD . A junta 2 pivota em torno do ponto B , e o atuador pivota ligeiramente em torno do ponto C , quando o elo move.

Cinemática de robôs industriais



Cinemática de robôs industriais

Os valores dos segmentos na figura anterior são, associados ao atuador 2 são:

$$\gamma_2 = AB, \quad \phi_2 = AC, \quad \alpha_2 = BC,$$

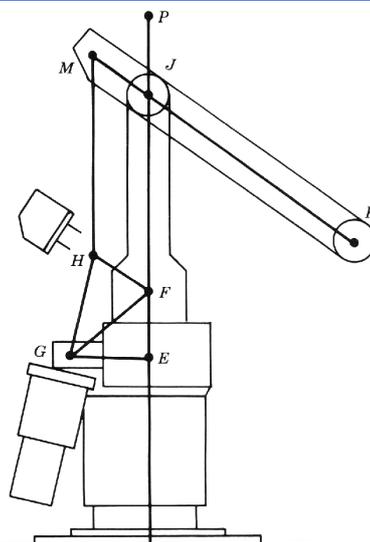
$$\beta_2 = BD, \quad \Omega_2 = \angle JBD, \quad l_2 = BJ$$

$$\theta_2 = -\angle JBQ, \quad \psi_2 = \angle CBD, \quad g_2 = DC$$

Cinemática de robôs industriais

- ◆ A figura a seguir mostra o mecanismo que conecta o atuador 3 aos elos 2 e 3 do robô. Trata-se de um atuador linear, que controla o comprimento do segmento **HG**. O triângulo **EFG** é fixo, assim como o comprimento **FH**. A junta 3 pivota em torno do ponto **J**, e o atuador pivota ligeiramente em torno do ponto **G**, quando o elo move.

Cinemática de robôs industriais



©1988 Mario Campos

73

Cinemática de robôs industriais

Os valores dos segmentos na figura anterior são, associados ao atuador 3 são:

$$\gamma_3 = EF, \quad \phi_3 = EG, \quad \alpha_3 = GF,$$

$$\beta_3 = HF, \quad l_3 = JK$$

$$\theta_3 = -\angle PJK \quad \psi_3 = \angle GFH, \quad g_3 = GH$$

©1988 Mario Campos

74

Cinemática de robôs industriais

O efeito do arranjo cinemático deste manipulador é o seguinte:

- O atuador 2 é utilizado para posicionar a junta 2, e enquanto move, o elo 3 permanece com a mesma orientação relativa à base do robô.
- O atuador 3 é utilizado para ajustar a orientação do elo 3 relativo à base do robô (ao invés de ser em relação ao elo anterior como no caso de um manipulador serial).
- Esse arranjo oferece grandes vantagens em termos da habilidade de posicionar o robô com grande precisão.

Cinemática de robôs industriais

- Os atuadores das juntas 4 e 5 são afixados ao elo 1 do robô, e os seus eixos são alinhados com o da junta 2 (pontos **B** e **F** das figuras anteriores).
- Eles atuam as juntas do pulso através de dois conjuntos de correntes localizadas no interior dos elos 2 e 3 respectivamente.
- O atuador 4 é utilizado para posicionar a junta 4 relativa à base do robô — independente das posições dos elos 2 e 3.
- O atuador 5 comporta-se como se estivesse diretamente ligado à junta 5.

Cinemática de robôs industriais

A seguir são mostradas as equações que mapeam os valores dos atuadores (A_i) aos valores equivalentes de juntas (θ_i). k_i e l_i são, respectivamente, os valores do fator de escala e do offset, e são constantes para cada atuador. Utiliza-se a “lei dos cossenos” para derivar as equações de juntas. As equações das juntas são mostradas a seguir.

Cinemática de robôs industriais

$$\begin{aligned}\theta_1 &= k_1 A_1 + \lambda_1, \\ \theta_2 &= \cos^{-1} \left(\frac{(k_2 A_2 + \lambda_2)^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}{-2\alpha_2 \beta_2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\phi_2}{\gamma_2} \right) + \Omega_2 - 270^\circ, \\ \theta_3 &= \cos^{-1} \left(\frac{(k_3 A_3 + \lambda_3)^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}{-2\alpha_3 \beta_3} \right) - \theta_2 + \tan^{-1} \left(\frac{\phi_3}{\gamma_3} \right) - 90^\circ, \\ \theta_4 &= -k_4 A_4 - \theta_2 - \theta_3 + \lambda_4 + 180^\circ, \\ \theta_5 &= -k_5 + \lambda_5.\end{aligned}$$

Cinemática de robôs industriais

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & l_3 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática de robôs industriais

$${}^0_5T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática de robôs industriais

$$r_{11} = c_1 c_{234} c_6 - s_1 s_5$$

$$r_{21} = s_1 c_{234} c_6 - s c_1 s_5$$

$$r_{31} = s_{234} c_5$$

$$r_{13} = c_1 s_{234}$$

$$r_{23} = s_1 s_{234}$$

$$r_{33} = c_{234}$$

$$r_{12} = c_1 c_{234} s_5 - s_1 c_5$$

$$r_{22} = -s_1 c_{234} s_5 - c_1 s_5$$

$$r_{32} = s_{234} s_5$$

$$p_x = c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})$$

$$p_y = s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})$$

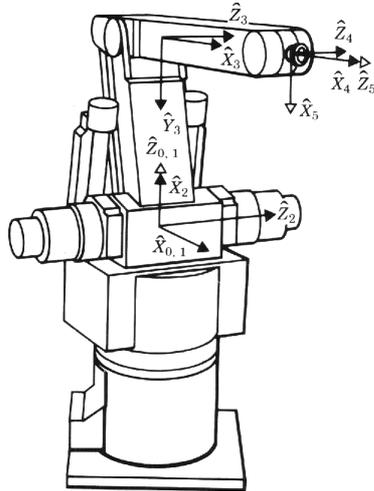
$$p_z = -l_2 c_2 - l_3 c_{23}$$

Cinemática de robôs industriais

Parâmetros dos elos do YASKAWA Motoman L3

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3
4	0	L_3	0	θ_4
5	90°	0	0	θ_5

Cinemática de robôs industriais



©1988 Mario Campos

83

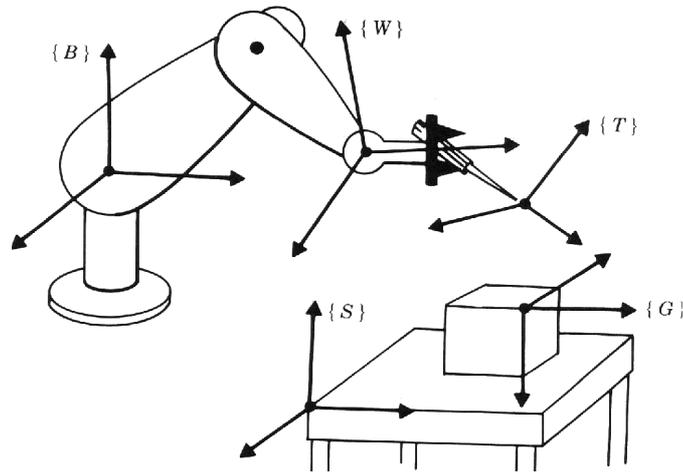
Referenciais padrão

- ◆ **Referencial da Base** $\{B\}$ — localizado na base do manipulador, outro nome para o elo $\{0\}$.
- ◆ **Referencial da Estação** $\{S\}$ — localizado em um ponto relevante para a tarefa, como a quina da mesa na figura a seguir. É considerado o referencial universal do ponto de vista do usuário. É sempre especificada em termos do referencial da base: ${}^B_S T$.
- ◆ **Referencial do pulso** $\{W\}$ — localizado no último elo do manipulador, outro nome para o elo $\{N\}$. É definido em relação ao referencial da base: ${}^B_W T = {}^B_N T$.

©1988 Mario Campos

84

Referenciais padrão



©1988 Mario Campos

85

Referenciais padrão

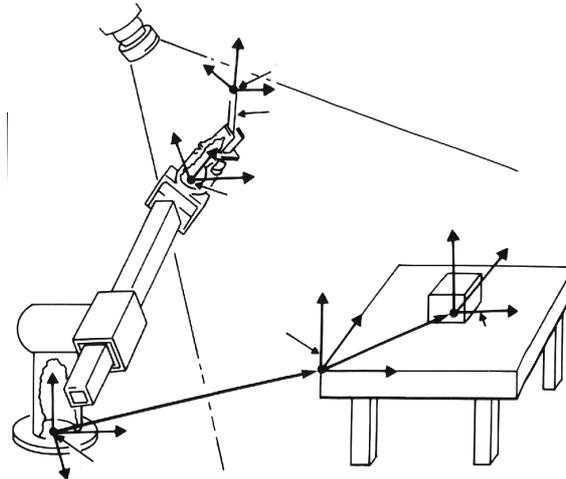
- ◆ **Referencial da Ferramenta** $\{T\}$ — localizado na ferramenta que o robô está segurando. Quando o *gripper* estiver vazio, esse referencial é localizado entre as garras.
- ◆ **Referencial do Alvo** $\{G\}$ — descreve a localização onde o robô deve mover a ferramenta. $\{G\}$ é sempre especificado em relação ao referencial da estação.
- ◆ Em geral deseja-se calcular a posição da ferramenta em relação à estação. A equação a seguir descreve onde está o braço do robô.

$$S_{\tau} \quad B_{\tau-1} \quad B_{\tau} \quad W_{\tau}$$

©1988 Mario Campos

86

Referenciais padrão



©1988 Mario Campos

87

Considerações computacionais

- ◆ Representação em ponto-fixo ou ponto-flutuante
 - Ponto-Flutuante gasta mais ciclos, mas é mais fácil de se trabalhar, do ponto de vista do programador;
 - Ponto-Fixo é mais rápido - problemas com escala. Em geral, 24 bits são suficientes.
- ◆ Fatorar equações
 - Utilização de variáveis locais;
 - Métodos de fatoração automatizados.
- ◆ Funções transcendentais
 - Look-up tables

©1988 Mario Campos

88