# Cinemática de Manipuladores

## Introdução

- **CINEMÁTICA**
  - Ciência que estuda os movimentos de um corpo abstraindo das forças que causaram tais movimentos.
  - São estudadas a *posição, velocidade, aceleração* e outras derivadas de mais alta ordem das variáveis de posição (com relação ao *tempo* ou a qualquer outra variável)

## Introdução

- **DINÂMICA**
  - Estuda o relacionamento entre movimentos e as forças e torques que os causaram.
  - Em particular, no caso de manipuladores, procura-se estudar dois problemas:
    - » Dado a trajetória de um ponto em termos de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ encontrar o vetor de torques de junta $\tau$.
    - » Dado o vetor de torques nas juntas $\tau$, calcular o movimento resultante do manipulador em termos de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$

## Introdução

- **CINEMÁTICA DIRETA**
  - Calcular a posição do órgão terminal do manipulador em função das variáveis de junta.

## Descrição de Elos – Definições

- **Corpo Rígido**
  - Entidade física cuja forma e dimensões (tamanho), não se alteram, ou seja, as distâncias relativas entre as partículas que o compõe não se alteram.
  - Na prática, um corpo é considerado como sendo rígido quando os movimentos e deformações intrínsecas ao mesmo são desprezíveis comparado ao movimento total do corpo.

## Descrição de Elos – Definições

- **Mecanismo**
  - qualquer meio que transmita, controle ou restrinja o movimento de um corpo rígido.
- **Máquina**
  - combinação de um conjunto de mecanismos discretos.
- **Elos**
  - corpos rígidos que se interligam para compor um mecanismo
- **Juntas**
  - são *pontos*, *linhas* ou *superfícies de contato* entre corpos rígidos.

## Descrição de Elos – Definições

- **Par Cinemático**
  - é formado quando *dois* corpos rígidos estão ligados por uma junta.
- **Elemento de um Par Cinemático**
  - cada uma das superfícies de um par cinemático.
- **Conexão ou acoplamento**
  - ligação de pares cinemáticos em série ou em paralelo.

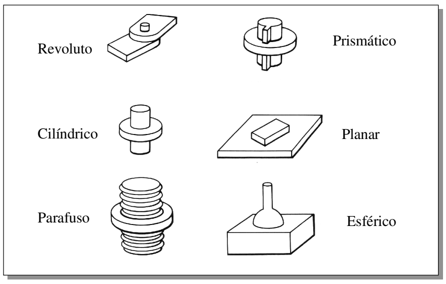



## Descrição de Elos – Definições

- **Pares Cinemáticos**
  - ***Par Alto*** – qualquer par cinemático onde os elementos do par sejam: um *ponto*, uma *linha reta* ou uma *linha curva*.
  - ***Par Baixo*** – são juntas de contato entre corpos rígidos cujos elementos são *superfícies*.
- **"Linkage"**
  - mecanismo onde todas as juntas são pares baixos.




## Descrições de Elos – Pares Baixos





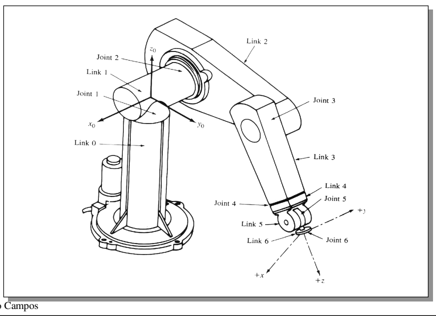


## Descrição de Elos

- **Manipuladores**
  - composto de juntas com um grau de liberdade (1 d.o.f.), em geral *revolutos* ou *prismáticos.*
- **Numeração dos elos**
  - a partir da base (elo 0); o primeiro corpo móvel e denominado elo 1, e assim sucessivamente
- **Elo**
  - Corpo rígido que define a relação entre dois eixos de juntas adjacentes de um manipulador




## Descrição de Elos – Exemplo







## Descrição de Elos

- **Eixo de uma junta**
  - definidos por linhas no espaço 3D, ou um vetor direcional.
  - O *eixo da junta i*, é o eixo no espaço 3D em torno do qual o *elo i* gira em relação ao *elo i – 1.*
  - Um elo pode ser definido por *dois* números que definem a localização relativa dos dois eixos no espaço.

## Descrição de Elos

- **Comprimento do elo — $a_{i-1}$**
  – Para quaisquer dois eixos no espaço 3D, existe uma medida bem definida de distância entre eles, que é medida sobre a reta que lhes é mutuamente perpendicular. Essa perpendicular mútua sempre existe, e é única, a não ser no caso de eixos paralelos, quando existirão infinitas perpendiculares de comprimento idêntico.

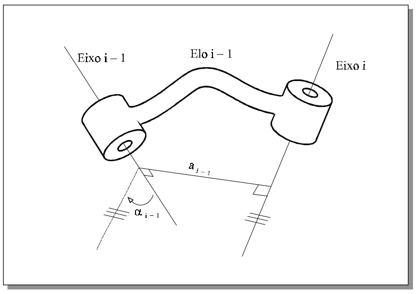
 

## Descrição de Elos

- **Torção do Elo — $\alpha_{i-1}$**
  – Em um plano normal à reta mutuamente perpendicular, e que contém o eixo $i-1$, projeta-se a imagem do eixo $i$. O ângulo, medido a partir de $i-1$ até a projeção de $i$, no esquema da "mão direita", é denominado $\alpha_{i-1}$.
  – Quando os eixos se interceptam, a torção é medida no plano que contém os dois eixos, mas o sentido de $\alpha_{i-1}$ é perdido. Neste caso especial o sinal de $\alpha_{i-1}$ é arbitrário.

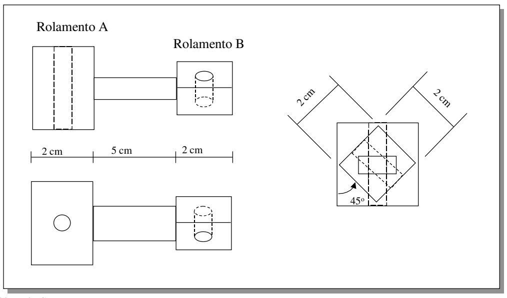
 

## Descrição de Elos



## Descrição de Elos – Exemplo



## Descrição da conexão entre elos

- A conexão entre elos em um manipulador envolve vários aspectos como a robustez da junta, a lubrificação, rolamentos e montagem das engrenagens. No caso da cinemática podemos abstrair desses aspectos, e concentrar em apenas dois parâmetros que especificarão a interconexão entre elos de maneira completa.

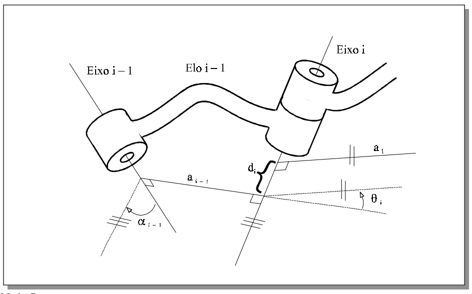
 

## Descrição da conexão entre elos

- **Elos intermediários na cadeia cinemática**
  – Um dos parâmetros, o ***offset do elo***, denominado $d_i$, descreve a distância (com sinal), sobre o eixo $i$, entre as duas perpendiculares comuns dos dois elos. Esta também é a variável de junta para o caso de junta prismática.
  – O segundo parâmetro, ***o ângulo de junta***, denominado $\theta_i$, descreve a rotação relativa entre os dois elos. É a variável de junta para o caso de junta revoluta.

## Descrição da conexão entre elos



## Descrição da conexão entre elos

- **Elos inicial e final**
  - O comprimento do elo, $\boldsymbol{a_i}$ , e a torção do elo, $\boldsymbol{\alpha_i}$ , dependem dos eixos das juntas $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{i + 1}$. No final da cadeia cinemática, convenciona-se que o valor desses parâmetros é zero. Ou seja, $\boldsymbol{a_0} = \boldsymbol{a_n} = 0.0$ e $\boldsymbol{\alpha_0} = \boldsymbol{\alpha_n} = 0.0$ graus.
  - O offset do elo $\boldsymbol{d_i}$ ,e o ângulo entre juntas, $\boldsymbol{\theta_i}$ , são bem definidos para $i = 2$ *a* $i = n - 1$. Se a junta 1 for revoluta, a posição para o zero de $\boldsymbol{\theta_1}$ pode ser escolhida arbitrariamente, e convenciona-se que $\boldsymbol{d_1} = 0.0$. Se a junta 1 for prismática, a posição para o zero de $\boldsymbol{d_1}$ pode ser escolhida arbitrariamente, e convenciona-se que $\boldsymbol{\theta_1} = 0.0$.
  - O mesmo se aplica para a junta ***n***

## Descrição da conexão entre elos

- Notação de ***Denavit-Hartenberg***
  - Um robô pode ser descrito, cinematicamente, através de apenas 4 parâmetros:
    - » 2 descrevem o elo
    - » 2 descrevem a conexão do elo com os adjacentes
  - Esta convenção é denominada Denavit-Hartenberg
  - Um robô com 6 d.o.f. revolutos requer 18 parâmetros (seis conjuntos $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{\alpha_i}$, $\boldsymbol{d_i}$ )

## Descrição da conexão entre elos

- Exemplo
  - Assuma que dois elos como os mostrados na figura da página 16 estão conectados de maneira que as superfícies planas dos rolamentos A e B esteja justapostas. Qual o valor de $\boldsymbol{d_2}$?
  - Resposta: 2.5 cm.

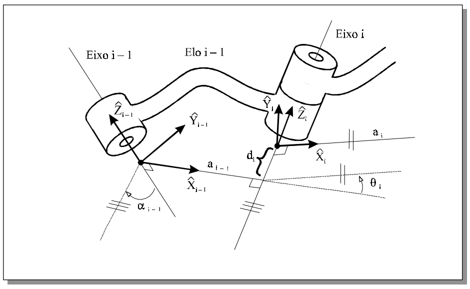
 

## Afixando referenciais aos elos

- **Convenção**
  - Os referenciais são denominados segundo o número de cada elo, ao qual está fixado. Ou seja, o referencial **{*i*}** está firmemente afixado ao elo ***i***.
- **Elos intermediários na cadeia**
  - O eixo $\hat{Z}$ do referencial $\{i\}$ é coincidente com o eixo *i*.
  - A origem do referencial é locado onde a perpendicular comum intercepta o eixo *i*.
  - $\hat{X}_i$ aponta na direção da junta $i + 1$.
  - Caso $a_i = 0.0$, $\hat{X}_i$ é normal ao plano de $\hat{Z}_i$ e $\hat{Z}_{i+1}$ .
  - Define-se $\alpha_i$ segundo a regra da mão direita em torno de $\hat{X}_i$

## Afixando referenciais aos elos



## Afixando referenciais aos elos

- **Primeiro elo da cadeia cinemática**
  - Afixa-se um referencial à base do robô, denominando-o de referencial $\{0\}$. Como esse referencial não muda, pode ser considerado um *frame* de referência.
  - Orienta-se $\hat{Z}_0$ ao longo do eixo *1* do referencial $\{0\}$, que por sua vez é posicionado de forma coincidente com o referencial $\{1\}$, quando o valor da variável da junta 1 é zero.
  - Utilizando essa convenção, sempre teremos $a_0 = 0.0$, $\alpha_0 = 0.0$. Isso também garante que $d_1 = 0.0$ se a junta 1 for revoluta, e $\theta_1 = 0.0$ se a junta 1 for prismática.



## Afixando referenciais aos elos

- **Último elo da cadeia cinemática**
  - Se a junta ***n*** for revoluta, a direção de $\hat{X}_N$ é escolhida de forma que seja alinhada com com $\hat{X}_{N-1}$ quando $\theta_n = 0.0$, e a origem do referencial $\{N\}$ é escolhida de forma que $d_n = 0.0$.
  - Para junta ***n*** prismática, a direção de $\hat{X}_N$ é escolhida de forma que $\theta_n = 0.0$, e a origem do referencial $\{N\}$ é posicionada na interseção de $\hat{X}_{N-1}$ e o eixo da junta ***n*** quando $d_n = 0.0$.



## Afixando referenciais aos elos

- Resumo dos parâmetros de elos

$\boldsymbol{a_i}$ — distância entre $\hat{Z}_i$ e $\hat{Z}_{i+1}$, medida ao longo de $\hat{X}_i$;
$\boldsymbol{\alpha_i}$ — ângulo entre $\hat{Z}_i$ e $\hat{Z}_{i+1}$, medido em torno de $\hat{X}_i$;
$\boldsymbol{d_i}$ — distância entre $\hat{X}_{i-1}$ e $\hat{X}_i$, medido ao longo de $\hat{Z}_i$;
$\boldsymbol{\theta_i}$ — ângulo entre $\hat{X}_{i-1}$ e $\hat{X}_i$, medido em torno de $\hat{Z}_i$

– Escolhe-se $\boldsymbol{a_i} > 0$, já que corresponde a um distância, e $\boldsymbol{\alpha_i}$, $\boldsymbol{d_i}$, e $\boldsymbol{\theta_i}$ são quantidades com sinal.



## Afixando referenciais aos elos

- Resumo do procedimento
  1. Identificar os eixos das juntas e imaginar retas infinitas alinhadas com eles. Nos passos 2 a 5, considere duas retas como estas passando pelos eixos ***i*** e ***i+1***.
  2. Identificar a perpendicular ou ponto de interseção comum aos dois eixos. Afixe a origem do referencia do elo no ponto de interseção dos eixos ou onde a perpendicular comum entre eles interceptar o eixo ***i*** .



## Afixando referenciais aos elos

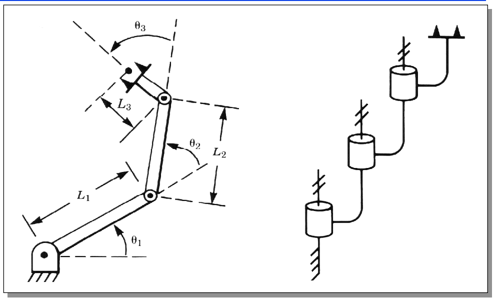
3. Assinalar o eixo $\hat{Z}_i$ colinear com o eixo da junta ***i***.
4. Assinalar o eixo $\hat{X}_i$ colinear com a perpendicular comum, ou se os eixos se interceptarem, assinalar $\hat{X}_i$ de forma a que seja normal ao plano que contém os dois eixos.
5. Assinalar o eixo $\hat{Y}_i$ de forma a completar o referencial segundo a "regra da mão direita".
6. Assinalar {0} de forma a coincidir {1} quando a variável da primeira junta for zero. Escolher para $\{N\}$ a localização de sua origem e escolha $\hat{X}_N$ livremente, mas de forma a fazer com que a maioria dos parâmetros de elo sejam zero



## Afixando referenciais aos elos

- Exemplo:
  - O manipulador da figura a seguir é chamado de mecanismo do tipo "RRR" (3 R). Ao lado está a representação esquemática do mesmo. Assinalar referenciais aos elos, e definir os parâmetros de Denavit-Hartenberg do mesmo.

## Afixando referenciais aos elos



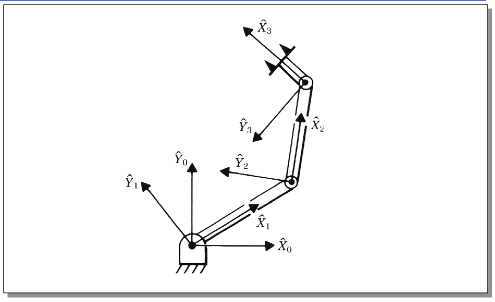

 

## Afixando referenciais aos elos

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | $\theta_3$ |

## Afixando referenciais aos elos



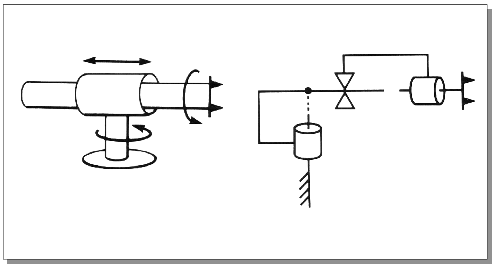

 

## Afixando referenciais aos elos

- Na figura a seguir temos um manipulador do tipo *RPR*, que indica o tipo e a ordem das conexões de suas juntas. O ponto no diagrama esquemático é usado para indicar onde o ponto onde dois eixos adjacentes se interceptam.

## Afixando referenciais aos elos



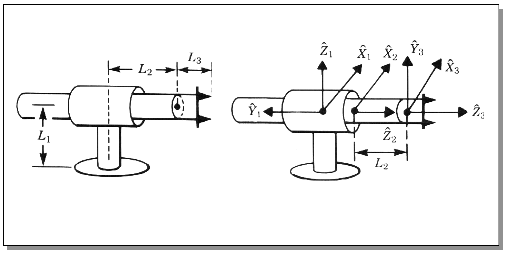
 

## Afixando referenciais aos elos

- Temos, na figura a seguir, o posicionamento final dos referenciais nos elos.
- Observe que $\theta_2$ é zero para este robô, e que $d_2$ é a variável de junta.
- Os eixos 1 e 2 se interceptam, o que faz com que $a_1$ seja zero.
- O ângulo $\alpha_1$ deve ser de 90º

## Afixando referenciais aos elos






## Afixando referenciais aos elos

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 90° | 0 | $d_2$ | 0 |
| 3 | 0 | 0 | $L_2$ | $\theta_3$ |



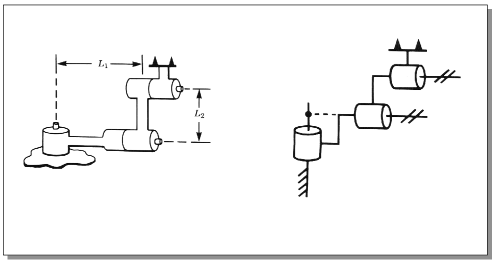
## Afixando referenciais aos elos

- Exemplo

  A figura a seguir mostra um manipulador de 3 elos do tipo RRR, no qual os eixos das juntas 1 e 2 se interceptam, e os eixos 2 e 3 são paralelos. Demonstrar a multiplicidade de soluções para assinalamento dos parâmetros Denavit-Hartenberg.

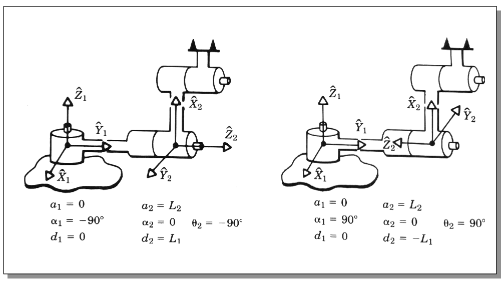


## Afixando referenciais aos elos



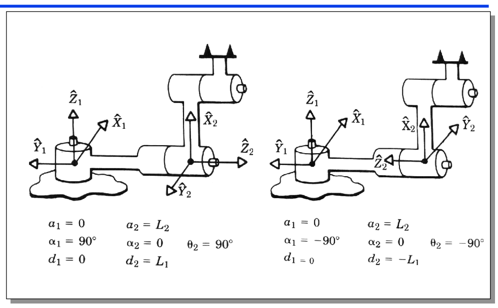



## Afixando referenciais aos elos






## Afixando referenciais aos elos



## Cinemática de Manipuladores

- Objetivo é derivar a forma geral da transformação que relaciona os referenciais afixados em elos adjacentes.
- Posteriormente, essas transformações individuais serão concatenadas para calcular a posição e orientação do elo ***n*** em relação ao elo **0**.

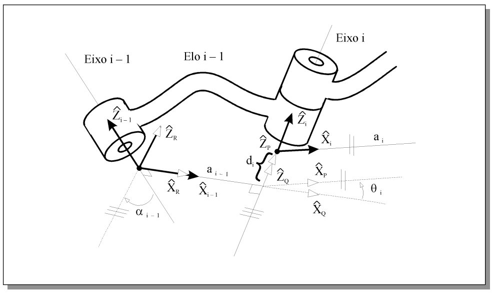



## Cinemática de Manipuladores

- Derivando as transformações de elos
  - Deseja-se determinar a transformação que define o referencial $\{i\}$ em relação ao referencial $\{i\text{-}1\}$.
  - No caso geral essa transformação será função dos quatro parâmetros de elos.
  - Para qualquer robô, essa transformação será função de apenas uma variável, sendo que os outros parâmetros serão fixos e determinados pelo projeto mecânico.
  - Determina-se, para isso, três referenciais intermediários: $\{P\}$, $\{Q\}$ e $\{R\}$.




## Cinemática de Manipuladores







## Cinemática de Manipuladores

- A figura anterior mostra o mesmo par de juntas, apenas com os referenciais $\{P\}$, $\{Q\}$ e $\{R\}$ definidos.
- $\{R\}$ difere de $\{i\text{-}1\}$ de uma rotação de $\alpha_{i-1}$;
- $\{Q\}$ difere de $\{R\}$ de uma translação $a_{i-1}$;
- $\{P\}$ difere de $\{Q\}$ de uma rotação de $\theta_i$;
- $\{i\}$ difere de $\{P\}$ de uma translação $d_i$.




## Cinemática de Manipuladores

Para transformar-se um vetor no referencial $\{i\}$ para sua descrição no referencial $\{i\text{-}1\}$, pode-se escrever:

$$ {}^{i-1}P = {}^{i-1}_{R}T\ {}^{R}_{Q}T\ {}^{Q}_{P}T\ {}^{P}_{i}T\ {}^{i}P $$

ou

$$ {}^{i-1}P = {}^{i-1}_{i}T\ {}^{i}P $$

onde

$$ {}^{i-1}_{i}T = {}^{i-1}_{R}T\ {}^{R}_{Q}T\ {}^{Q}_{P}T\ {}^{P}_{i}T $$




## Cinemática de Manipuladores

A equação anterior pode ser escrita:

$$ {}^{i-1}_{i}T = R_X(\alpha_{i-1})\ D_X(a_{i-1})\ R_Z(\theta_i)\ D_Z(d_i) $$

ou

$$ {}^{i-1}_{i}T = Screw_X(a_{i-1}, \alpha_{i-1})\ \ Screw_Z(d_i, \theta_i) $$

Onde a notação $Screw_Q\,(r,\phi)$ significa uma translação ao longo do eixo $\hat{Q}$ de uma distância $r$, e de uma rotação $\phi$ em torno do mesmo eixo.

## Cinemática de Manipuladores

Finalmente, multiplicando-se as transformações, obtém-se:

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

## Cinemática de Manipuladores

- Exemplo

  Para o manipulador mostrado na página 34, pode-se calcular cada uma das transformações. Para isto, basta substituir os parâmetros do referido manipulador na equação anterior.

  O resultado pode ser visto nas equações a seguir.

## Cinemática de Manipuladores

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

## Cinemática de Manipuladores

Tendo sido definidos os referenciais e os parâmetros dos elos, pode-se encontrar as equações cinemáticas de maneira fácil. Isso é realiza com a multiplicação das matrizes de transformação de cada elo, de forma que se obtém uma única matriz de transformação que relaciona o referencial $\{N\}$ ao referencial $\{0\}$:

$$ {}^{0}_{N}T = {}^{0}_{1}T\ {}^{1}_{2}T\ {}^{2}_{3}T \ldots {}^{N-1}_{N}T $$

## Espaço de atuadores, juntas e cartesiano

- ***Vetor de juntas*** — vetor $n \times 1$ formado pelo conjunto de ***n*** variáveis de junta, as quais descrevem a posição de todos os elos de um manipulador de ***n*** d.o.f.
- ***Espaço de juntas*** — espaço definido por todos os vetores de juntas.
- ***Espaço Cartesiano*** — termo utilizado quando a posição é especificada segundo os eixos ortogonais e a rotação é especificada segundo qualquer das convenções especificadas anteriormente. Também denominado ***espaço orientado-a-tarefa*** ou ***espaço operacional.***

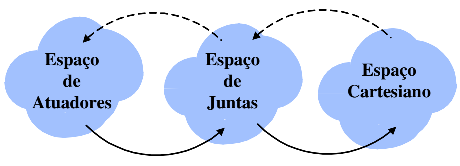
## Espaço de atuadores, juntas e cartesiano

- ***Vetor de atuadores***—formado pelo conjunto de variáveis de atuadores, utilizadas para descrever o vetor de juntas. Na maioria dos casos, a junta não é atuada diretamente. Pode-se ter, um par de atuadores pode ser utilizado para mover uma única junta. Também pode-se ter um atuador linear para realizar o movimento de rotação de uma junta. Os sensores de posição, em geral, estão localizados nos atuadores.
- ***Espaço de atuadores*** — espaço definido por todos os vetores de atuador.

## Espaço de atuadores, juntas e cartesiano

Mapeamento entre espaços:



## Cinemática de robôs industriais

- Exemplo de dois manipuladores industriais:
  - **PUMA 560** — 6 d.o.f., juntas rotacionais. Derivação da cinemática direta ao nível do espaço de juntas.
  - **Yaskawa Motoman L3** — 5 d.o.f., juntas rotacionais. Derivação da cinemática direta a partir do espaço de atuadores.

## Cinemática de robôs industriais

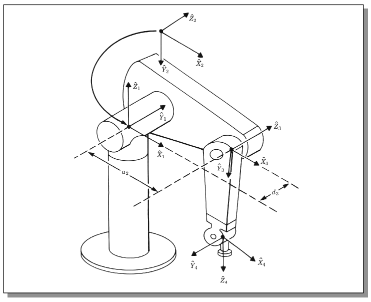
- **PUMA 560**

As figuras a seguir mostram o assinalamento de referenciais aos elos do manipulador. Observa-se que os eixos das juntas 4, 5 e 6 interceptam-se em um ponto comum, que também é o ponto onde coincidem as origens dos referenciais {4}, {5} e {6}. Além disso, todas essas juntas são ortogonais.

É importante se observar que por razões construtivas, os movimentos dos elos 4, 5 e 6 são acoplados. Isso implica que a cinemática deve ser calculada em dois passos: espaço de atuadores e posteriormente no espaço de juntas.

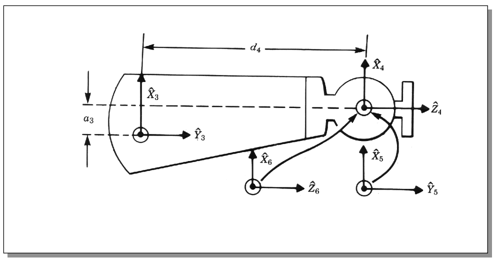
 

## Cinemática de robôs industriais



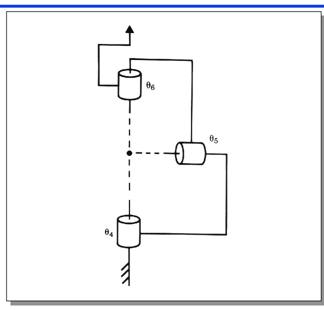
 

## Cinemática de robôs industriais



## Cinemática de robôs industriais



## Cinemática de robôs industriais

Parâmetros dos elos do PUMA 560

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | –90° | 0 | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $a_2$ | $d_3$ | $\theta_3$ |
| 4 | –90° | $a_3$ | $d_4$ | $\theta_4$ |
| 5 | 90° | 0 | 0 | $\theta_5$ |
| 6 | –90° | 0 | 0 | $\theta_6$ |



## Cinemática de robôs industriais

Transformadas dos elos do PUMA 560

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5_6T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



## Cinemática de robôs industriais

$$ {}^1_3T = \begin{bmatrix} c23 & -s23 & 0 & a2c2 \\ 0 & 0 & 1 & d3 \\ -s23 & -c23 & 0 & -a2s2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

onde $c23 = c2c3 - s2s3$ e $s23 = c2s3 + s2c3$

$$ {}^3_6T = \begin{bmatrix} c4c5c6 - s4s6 & -c4c5s6 - s4s6 & -c4s5 & a3 \\ s5c6 & -s5s6 & c5 & d4 \\ -s4c5c6 - c4s6 & s4c5s6 - c4c6 & s4s5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



## Cinemática de robôs industriais

Temos, multiplicando-se as duas transformações:

$$ {}^1_6T = {}^1_3T \; {}^3_6T = \begin{bmatrix} {}^1r11 & {}^1r12 & {}^1r13 & {}^1px \\ {}^1r21 & {}^1r22 & {}^1r23 & {}^1py \\ {}^1r31 & {}^1r32 & {}^1r33 & {}^1pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



## Cinemática de robôs industriais

$${}^1r11 = c23[c4c5c6 - s4s6] - s23s5s6$$
$${}^1r21 = -s4c5c6 - c4s6$$
$${}^1r31 = s23[c4c5c6 - s4s6] - c23s5c6$$
$${}^1r12 = -c23[c4c5c6 + s4s6] + s23s5s6$$
$${}^1r22 = s4c5c6 - c4s6$$
$${}^1r32 = s23[c4c5s6 + s4c6] - c23s5s6$$

$${}^1r13 = c23c4s5 - s23c5$$
$${}^1r23 = s4s5$$
$${}^1r33 = s23c4s5 - c23c5$$
$${}^1px = a2c2 + a2c3 - d4s23$$
$${}^1py = d3$$
$${}^1pz = -a2s23 - a2s2 - d4c23$$



## Cinemática de robôs industriais

Finalmente, tem-se que:

$$ {}^0_6T = {}^0_1T \; {}^1_6T = \begin{bmatrix} r11 & r12 & r13 & px \\ r21 & r22 & r23 & py \\ r31 & r32 & r33 & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

## Cinemática de robôs industriais

$$r_{11} = c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5s_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$
$$r_{21} = s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5s_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$
$$r_{31} = s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6$$
$$r_{12} = c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) - s_{23}s_5s_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$
$$r_{22} = s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) - s_{23}s_5s_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$
$$r_{32} = -s_{23}[c_4c_5s_6 - s_4c_6] - c_{23}s_5c_6$$
$$r_{13} = -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5$$
$$r_{23} = -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5$$
$$r_{33} = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$$
$$px = c_1[a_2c_2 + a_2c_3 - d_4s_{23}] - d_3s_1$$
$$p_y = s_1[a_2c_2 + a_2c_3 - d_4s_{23}] - d_3c_1$$
$$p_z = -a_2s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}$$

## Cinemática de robôs industriais

- **YASKAWA Motoman L-3**

Trata-se de um manipulador com 5 d.o.f (5R). Possui uma estrutura cinemática mais complexa, utilizando dois atuadores lineares acoplados aos elos 2 e 3, através de cadeias de 4 barras. Através de, dois atuadores em arranjo diferencial movimentam as juntas 4 e 5.

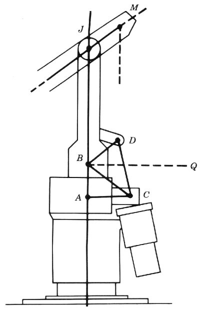
 

## Cinemática de robôs industriais

- A figura a seguir mostra o mecanismo que conecta o atuador 2 aos elos 2 e 3 do robô. Trata-se de um atuador linear, que controla o comprimento do segmento ***DC***. O triângulo ***ABC*** é fixo, assim como o comprimento ***BD***. A junta 2 gira em torno do ponto ***B***, e o atuador gira ligeiramente em torno do ponto ***C***, quando o elo move.

## Cinemática de robôs industriais



## Cinemática de robôs industriais

Os valores dos segmentos na figura anterior são, associados ao atuador 2 são:

$$\gamma 2 = AB,\ \ \phi 2 = AC,\ \ \alpha 2 = BC,$$
$$\beta 2 = BD,\ \ \Omega 2 = \angle\ JBD,\ \ l2 = BJ$$

$$\theta 2 = -\angle\ JBQ,\ \ \psi 2 = \angle\ CBD,\ \ g2 = DC$$

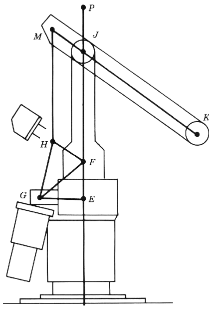
 

## Cinemática de robôs industriais

- A figura a seguir mostra o mecanismo que conecta o atuador 3 aos elos 2 e 3 do robô. Trata-se de um atuador linear, que controla o comprimento do segmento ***HG***. O triângulo ***EFG*** é fixo, assim como o comprimento ***FH***. A junta 3 gira em torno do ponto ***J***, e o atuador gira ligeiramente em torno do ponto ***G***, quando o elo move.

## Cinemática de robôs industriais






## Cinemática de robôs industriais

Os valores dos segmentos na figura anterior são, associados ao atuador 3 são:

$\gamma_3 = EF,\ \phi_3 = EG,\ \alpha_3 = GF,$
$\beta_3 = HF,\ l_3 = JK$

$\theta 3 = -\angle\ PJK\ \ \psi_3 = \angle\ GFH,\ g_3 = GH$



## Cinemática de robôs industriais

O efeito do arranjo cinemático deste manipulador é o seguinte:

- O atuador 2 é utilizado para posicionar a junta 2, e enquanto move, o elo 3 permanece com a mesma orientação relativa à base do robô.
- O atuador 3 é utilizado para ajustar a orientação do elo 3 relativo à base do robô (ao invés de ser em relação ao elo anterior como no caso de um manipulador serial).
- Esse arranjo oferece grandes vantagens em termos da habilidade de posicionar o robô com grande precisão.



## Cinemática de robôs industriais

- Os atuadores das juntas 4 e 5 são afixados ao elo 1 do robô, e os seus eixos são alinhados com o da junta 2 (pontos ***B*** e ***F*** das figuras anteriores).
- Eles atuam as juntas do pulso através de dois conjuntos de correntes localizadas no interior dos elos 2 e 3 respectivamente.
- O atuador 4 é utilizado para posicionar a junta 4 relativa à base do robô — independente das posições dos elos 2 e 3.
- O atuador 5 comporta-se como se estivesse diretamente ligado à junta 5.



## Cinemática de robôs industriais

A seguir são mostradas as equações que mapeam os valores dos atuadores ($\boldsymbol{A_i}$) aos valores equivalentes de juntas ($\theta_i$). $\boldsymbol{k_i}$ e $\boldsymbol{l_i}$ são, respectivamente, os valores do fator de escala e do offset, e são constantes para cada atuador. Utiliza-se a "lei dos cosenos" para derivar as equações de juntas.
As equações das juntas são mostradas a seguir.



## Cinemática de robôs industriais

$$\theta_1 = k_1 A_1 + \lambda_1,$$

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{(k_2 A_2 + \lambda_2)^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}{-2\alpha_2\beta_2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\phi_2}{\gamma_2}\right) + \Omega_2 - 270^\circ,$$

$$\theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{(k_3 A_3 + \lambda_3)^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}{-2\alpha_3\beta_3}\right) - \theta_2 + \tan^{-1}\left(\frac{\phi_3}{\gamma_3}\right) - 90^\circ,$$

$$\theta_4 = -k_4 A_4 - \theta_2 - \theta_3 + \lambda_4 + 180^\circ,$$

$$\theta_5 = -k_5 + \lambda_5.$$

## Cinemática de robôs industriais

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & l_3 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



## Cinemática de robôs industriais

$$ {}^0_5T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



## Cinemática de robôs industriais

$$ r11 = c1c234c6 - s1s5 \qquad r12 = c1c234s5 - s1c5 $$
$$ r21 = s1c234c6 - sc1s5 \qquad r22 = -s1c234s5 - c1s5 $$
$$ r31 = s234c5 \qquad r32 = s234s5 $$

$$ r13 = c1s234 \qquad px = c1(l2c2 + l3c23) $$
$$ r23 = s1s234 \qquad p_y = s1(l2c2 + l3c23) $$
$$ r33 = c234 \qquad p_z = -l2c2 - l3c23 $$



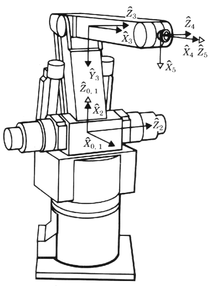
## Cinemática de robôs industriais

Parâmetros dos elos do YASKAWA Motoman L3

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | –90° | 0 | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | $\theta_3$ |
| 4 | 0 | $L_3$ | 0 | $\theta_4$ |
| 5 | 90° | 0 | 0 | $\theta_5$ |



## Cinemática de robôs industriais

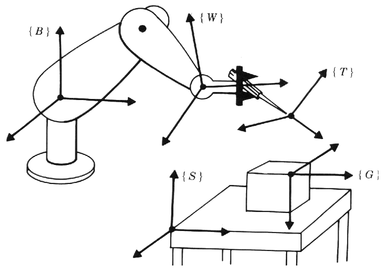




## Referenciais padrão

- ***Referencial da Base*** $\{B\}$ — localizado na base do manipulador, outro nome para o elo $\{0\}$.
- ***Referencial da Estação*** $\{S\}$ — localizado em um ponto relevante para a tarefa, como a quina da mesa na figura a seguir. É considerado o referencial universal do ponto de vista do usuário. É sempre especificada em termos do referencial da base: ${}^B_ST$.
- ***Referencial do pulso*** $\{W\}$ — localizado no último elo do manipulador, outro nome para o elo $\{N\}$. É definido em relação ao referencial da base: $\{W\} = {}^B_WT = {}^0_NT$.

## Referenciais padrão





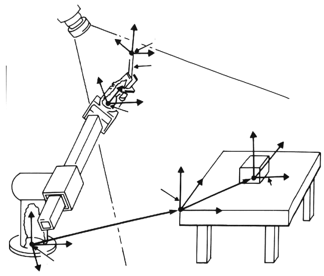

## Referenciais padrão

- ***Referencial da Ferramenta*** $\{T\}$ — localizado na ferramenta que o robô está segurando. Quando a garra estiver vazio, esse referencial é localizado entre as garras.
- ***Referencial do Alvo*** $\{G\}$ — descreve a localização onde o robô deve mover a ferramenta. $\{G\}$ é sempre especificado em relação ao referencial da estação.
- Em geral deseja-se calcular a posição da ferramenta em relação à estação. A equação a seguir descreve onde está o braço do robô.

$$ {}^{S}_{T}T = {}^{B}_{S}T^{-1}\ {}^{B}_{W}T\ {}^{W}_{T}T $$



## Referenciais padrão





## Considerações computacionais

- Representação em ponto-fixo ou ponto-flutuante
  - Ponto-Flutuante gasta mais ciclos, mas é mais fácil de se trabalhar, do ponto de vista do programador;
  - Ponto-Fixo é mais rápido - problemas com escala. Em geral, 24 bits são suficientes.
- Fatorar equações
  - Utilização de variáveis locais;
  - Métodos de fatoração automatizados.
- Funções transcendentais
  - Look-up tables