
Descrições Espaciais e Transformações

Descrições Espaciais e Transformações

- ◆ Descrever objetos no espaço 3D;
- ◆ Formulação matemática consistente;
- ◆ Sistema coordenado universal

Notação

- ◆ **Vetores e Matrizes** — Letra Maiúscula
- ◆ **Escalares** — Letra Minúscula
- ◆ **Referenciais** — Sobrescrito e Subscrito precedentes

${}^A P$ — vetor de posição P descrito no referencial $\{A\}$

${}^A_B R$ — matriz de rotação que especifica a relação entre os referenciais $\{A\}$ e $\{B\}$

Notação

- ◆ Inverso, transposição

$$R^{-1}, R^T$$

- ◆ Subscritos suscedentes — nenhuma convenção específica.

P_{bolt} — posição de um parafuso

- ◆ Funções trigonométricas

$$\cos \theta_1 = c\theta_1 = c_1$$

Descrições: Posição, Orientação e Referenciais

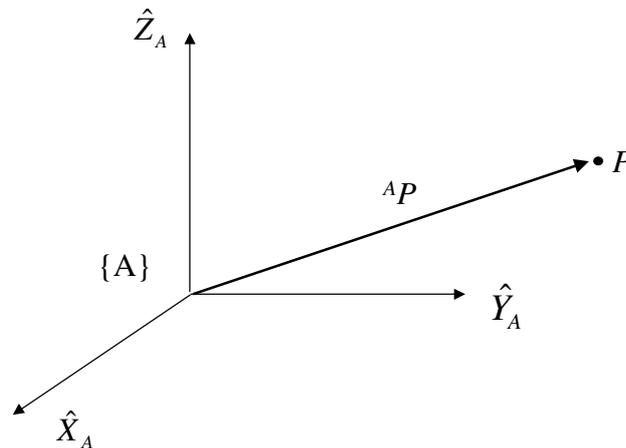
- ◆ Descrição de Posição
- ◆ Descrição Orientação

Descrição de Posição

- ◆ POSIÇÃO — Definida em relação a um referencial pelo vetor ${}^A P$ (3×1), denominado Vetor de Posição, que é o vetor P descrito em relação ao referencial {A}:

$${}^A P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

Descrição de Posição



Descrição de Orientação

- ◆ ORIENTAÇÃO — de um referencial afixado num corpo, descrita pela Matriz de Rotação ${}^A R_B$ (3×3), composta pelos vetores unitários das direções principais de um referencial $\{B\}$, representados no referencial $\{A\}$:

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A X_B & {}^A Y_B & {}^A Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Descrição de Orientação

◆ Cosenos Diretores

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

Como $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, então, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos \theta$.

Descrição de Orientação

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \hat{X}_A^T \\ {}^B \hat{Y}_A^T \\ {}^B \hat{Z}_A^T \end{bmatrix}$$

Portanto, pode-se afirmar que:

$${}^B_A R = {}^A_B R^T$$

Isto sugere que o inverso da matriz de rotação é igual a sua transposta, como mostrado a seguir.

Descrição de Orientação

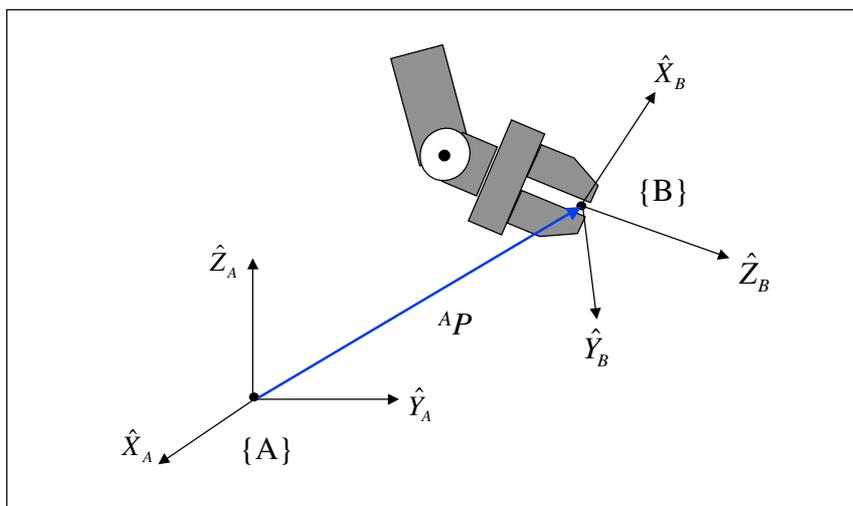
$${}^B R_A R^T = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B^T \\ {}^A \hat{Y}_B^T \\ {}^A \hat{Z}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} = I_3$$

Onde I_3 é a matriz identidade 3×3 . Portanto:

$${}^A R_B = {}^B R_A^{-1} = {}^B R_A^T$$

pela comutatividade do produto escalar.

Posição e Orientação

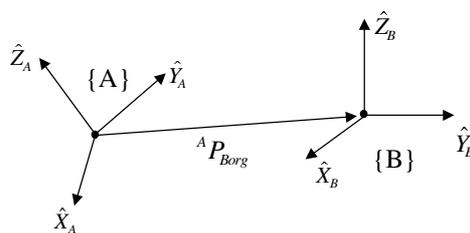


Descrição de um referencial

- ◆ REFERENCIAL — um par constituído de:

{ORIENTAÇÃO, POSIÇÃO}

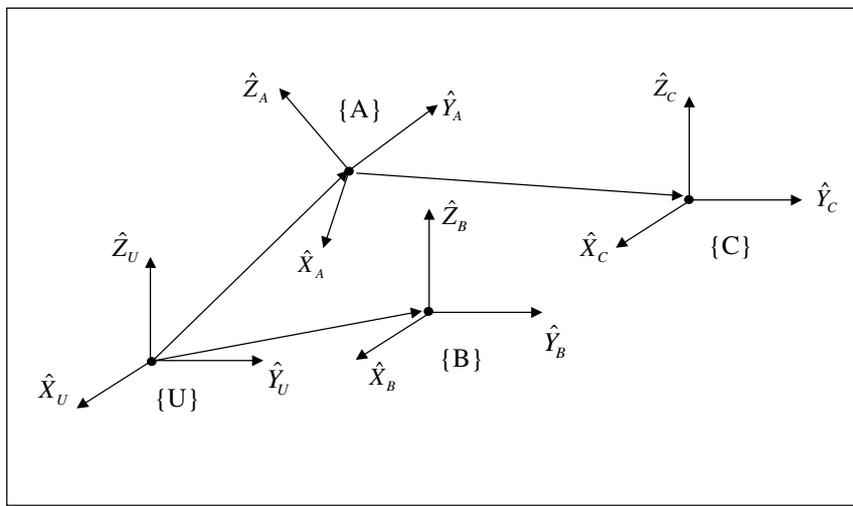
$$\{B\} = \left\{ {}^A R_B, {}^A P_{Borg} \right\}$$



Descrição de um referencial

- ◆ Um referencial (frame) é uma entidade composta de 4 vetores que fornecem informação de posição e orientação. Na figura a seguir, um desses vetores indica a posição das pontas dos “dedos” da garra, e três outros indicam a sua orientação.
- ◆ Por outro lado, um referencial nada mais é do que um sistema coordenado, ao qual, além da orientação, é fornecido um vetor de posição que descreve sua origem em relação a um outro referencial.

Representação Gráfica de Referenciais



©1998 Mario Campos

15

Mapeamentos

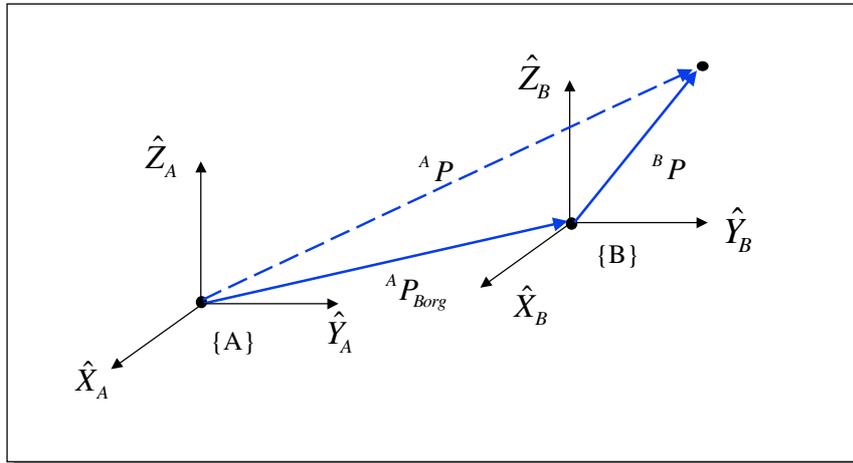
- ◆ Utilizados para mudar descrições de um referencial para outro referencial.
- ◆ Mapeamentos envolvendo referenciais transladados (sem rotação relativa):

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{Borg}$$

©1998 Mario Campos

16

Referenciais Transladados



Referenciais Rotacionados

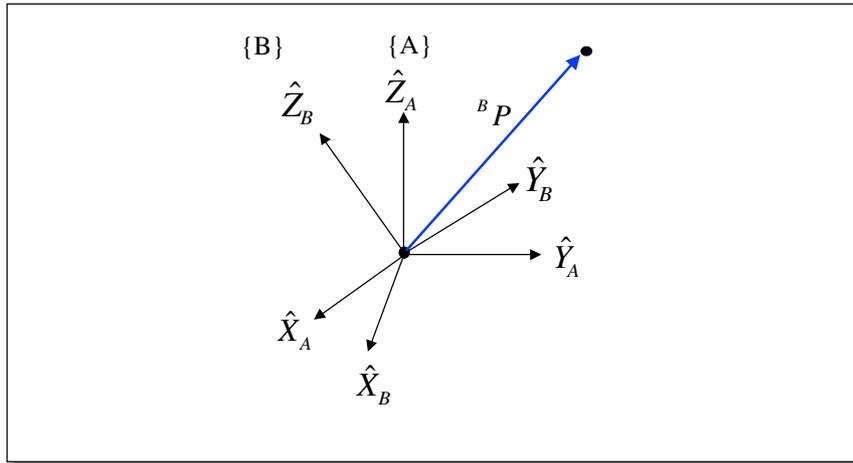
- ◆ Colunas da matriz de rotação são vetores unitários e mutuamente ortogonais. Como consequência:

$${}^A_B R = {}^B_A R^{-1} = {}^B_A R^T$$

e

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \hat{X}_A^T \\ {}^B \hat{Y}_A^T \\ {}^B \hat{Z}_A^T \end{bmatrix}$$

Referenciais Rotacionados



Referenciais Rotacionados

- ◆ Projeções dos componentes do vetor ${}^A P$ sobre os vetores unitários:

$${}^A p_x = {}^B \hat{X}_A \cdot {}^B P$$

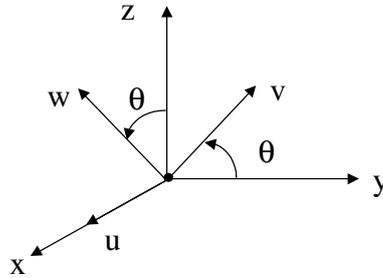
$${}^A p_y = {}^B \hat{Y}_A \cdot {}^B P$$

$${}^A p_z = {}^B \hat{Z}_A \cdot {}^B P$$

substituindo, temos:

$${}^A P = {}^A R {}^B P$$

Referenciais Rotacionados



$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix}$$

Referenciais Rotacionados

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix}$$

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Referenciais Rotacionados

- ◆ Exemplo: Referencial {B} rotacionado em relação a {A} de \hat{Z} de $\theta=30^\circ$:

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad {}^B P = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Referenciais Genéricos

- ◆ Descrever ${}^B P$ em relação a um frame intermediário, cuja orientação seja a mesma e {A}, e cuja origem seja coincidente com {A}.
- ◆ Realizar a soma vetorial para “descontar” a translação:

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P + {}^A P_{Borg}$$

- ◆ De maneira mais compacta:

$${}^A P = {}^A T_B {}^B P$$

Transformação Homogênea

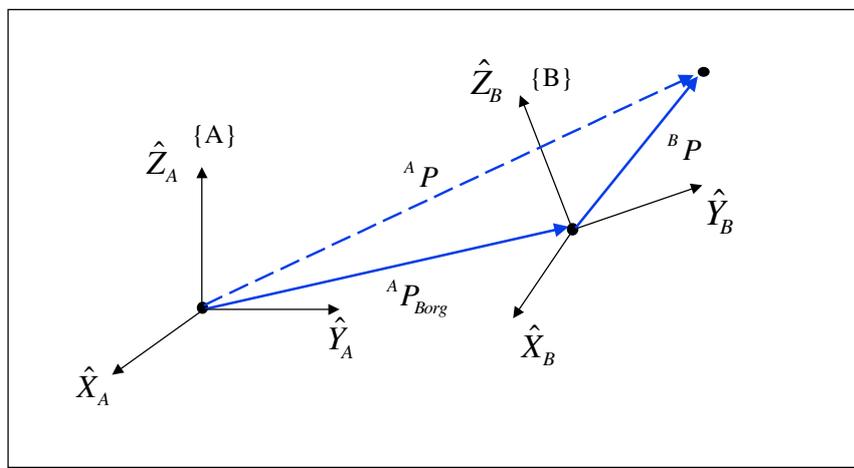
$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & | & {}^A P_{Borg} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

1. Um “1” é adicionado como último elemento dos vetores 4x1.
2. Uma linha com [0 0 0 1] é adicionada como última linha da matriz 4x4.

A descrição de {B} relativo a {A} é:

$${}^A T_B$$

Transformação Genérica



Transformação Genérica

- ◆ Exemplo: Sendo {B} rotacionado 30 graus em torno de \hat{Z} , e transladado de 10 unidades ao longo de \hat{Y}_A e de 5 unidades ao longo de \hat{X}_A , encontre ${}^A P$, sendo que ${}^B P = [3.0 \ 7.0 \ 0.0]^T$.

{B} pode ser definido como:

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformação Genérica

Sendo P, em relação a {B}: ${}^B P = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$

Temos, finalmente, que:

$${}^A P = {}^A T_B {}^B P = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

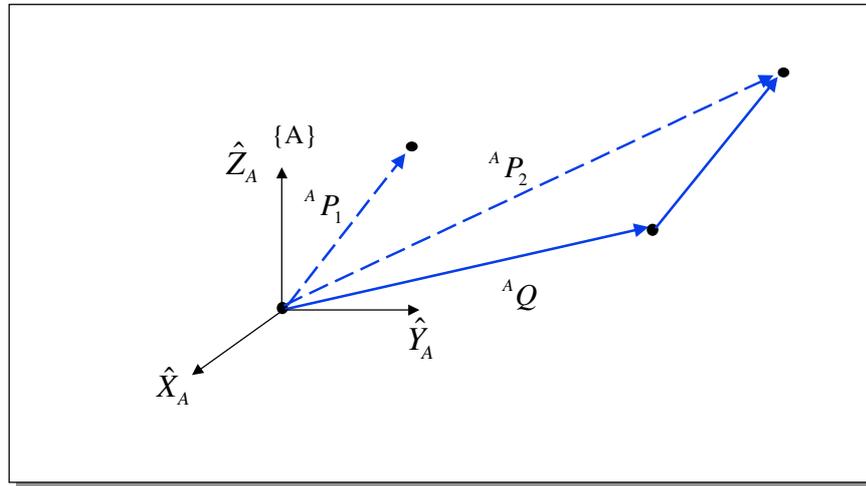
Operadores

- ◆ As mesmas formas matemáticas que utilizamos para mapear pontos entre referenciais, também podem ser interpretados como operadores que transladam pontos, rotacionam vetores, ou ambos.

Operador Translacional

- ◆ **Operador translacional** – move um ponto no espaço de uma distância finita, ao longo da direção de um dado vetor.
 - Apenas um sistema coordenado;
 - Mesma matemática de mapeamento de pontos entre referenciais;
 - Mover um vetor “para frente” em relação a um determinado referencial pode ser vista como:
 - » O vetor movendo “para frente”, ou
 - » O referencial movendo “para trás”.

Operador Translacional



Operador Translacional

- ◆ Da figura tem-se que:

$${}^A P_2 = {}^A P_1 + {}^A Q$$

ou, de outra maneira:

$${}^A P_2 = D_Q(q) {}^A P_1$$

onde:

q — magnitude (com sinal) da translação

\hat{Q} — vetor ao longo do qual ocorre a translação

Operador Translacional

- ◆ $D_Q(q)$ — pode ser considerado como uma transformação homogênea do tipo simples:

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde q_x, q_y, q_z são componentes do vetor \hat{Q} e:

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$

Operador Rotacional

- ◆ **Operador rotacional** – muda um vetor ${}^A P_1$ em um novo vetor ${}^A P_2$, através de uma rotação R :

$${}^A P_2 = R {}^A P_1$$

ou:

$${}^A P_2 = R_K(\theta) {}^A P_1$$

onde $R_K(\theta)$ refere-se ao operador rotacional

Operador Rotacional

- ◆ Um operador rotacional “ $R_z(\theta)$ ” que produz uma rotação de θ graus em torno de um eixo direcional \hat{Z} , pode ser escrito em coordenadas homogêneas:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operador Rotacional

- ◆ *A matriz de rotação que rotaciona vetores por meio de alguma rotação R , é equivalente à matriz de rotação que descreve um referencial rotacionado de R relativo a um referencial de referência.*

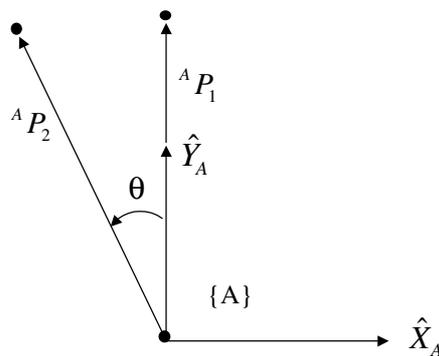
Operador Rotacional

- ◆ Exemplo: Calcular o novo vetor ${}^A P_2$ obtido através da rotação de 30 graus do vetor ${}^A P_1$ em torno de \hat{Z}

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad {}^A P_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$${}^A P_2 = R_z(\theta) {}^A P_1 = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Operador Rotacional



Operador de Transformação

- ◆ **Operador de transformação** – Como no caso de vetores de posição e matrizes de rotação, um referencial também pode ter uma outra interpretação. O operador T rotaciona e translada o vetor ${}^A P_1$ para produzir um novo vetor ${}^A P_2$:

$${}^A P_2 = T {}^A P_1$$

Operador de Transformação

- ◆ *Uma transformação que rotaciona de R e translada de Q é equivalente à transformação que descreve um referencial rotacionado de R e transladado de Q em relação ao referencial de referência.*

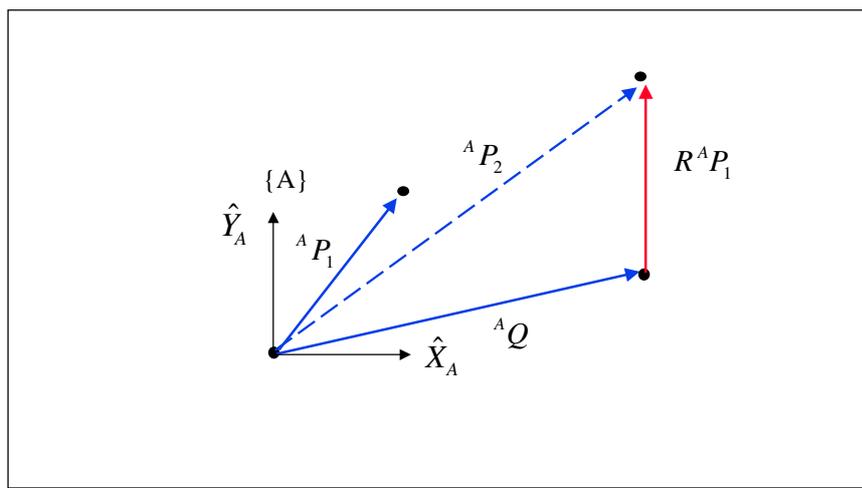
Operador de Transformação

- ◆ Exemplo: Deseja-se rotacionar o vetor

${}^A P_1 = [3.0 \ 7.0 \ 0.0]^T$ de 30 graus em torno do eixo \hat{Z}_A , e transladá-lo de 10 unidades em \hat{X}_A e 5 unidades em \hat{Y}_A . Determinar ${}^A P_2$.

$$T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^B P = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad {}^A P_2 = T {}^B P_1 = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Operador de Transformação



Resumo das interpretações

◆ *Transformações Homogêneas:*

1. Descrição de um referencial. ${}^A T_B$ descreve o referencial $\{B\}$ relativo ao referencial $\{A\}$. Mais especificamente, as colunas de ${}^A T_B$ são vetores unitários que definem as direções dos eixos principais de $\{B\}$, e ${}^A P_{Borg}$ localiza a posição da origem de $\{B\}$.

Resumo das Interpretações

2. *Transformação de mapeamento.* ${}^A T_B$ mapeia ${}^B P \mapsto {}^A P$.
3. *Operador de transformação.* T opera em ${}^A P_1$ para produzir ${}^A P_2$.

Referencial – usado para descrições

Transformação – usado mapeamentos ou operadores

Transformações Compostas

- Na figura a seguir, o referencial $\{C\}$ é conhecido em relação ao referencial $\{B\}$, e o referencial $\{B\}$ é conhecido em relação ao referencial $\{A\}$. Pode-se transformar ${}^C P$ em ${}^B P$:

$${}^B P = {}^B T {}^C P$$

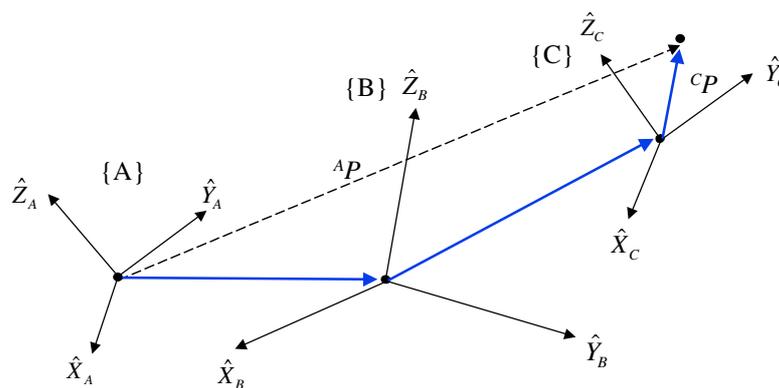
- e transformar ${}^B P$ em ${}^A P$:

$${}^A P = {}^A T {}^B P$$

- definindo:

$${}^A T = {}^A T {}^B T$$

Transformações Compostas



Transformações Compostas

Em termos das descrições de $\{B\}$ e $\{C\}$, temos:

$${}^A T_C = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^A R_C^B R & & & {}^A R_C^B P_{Corg} + {}^A P_{Borg} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Invertendo uma Transformação

- ◆ Inverter a matriz 4x4 – mais caro
- ◆ Fazer uso da estrutura da transformada:
 - ${}^B T_A$ pode ser encontrado a partir de ${}^A R$ e de ${}^B P_{Aorg}$

$${}^B ({}^A P_{Borg}) = {}^B R^A P_{Borg} + {}^B P_{Aorg}$$

$${}^B P_{Aorg} = -{}^B R^A P_{Borg} = -{}^A R^T {}^B P_{Borg}$$

Invertendo uma Transformação

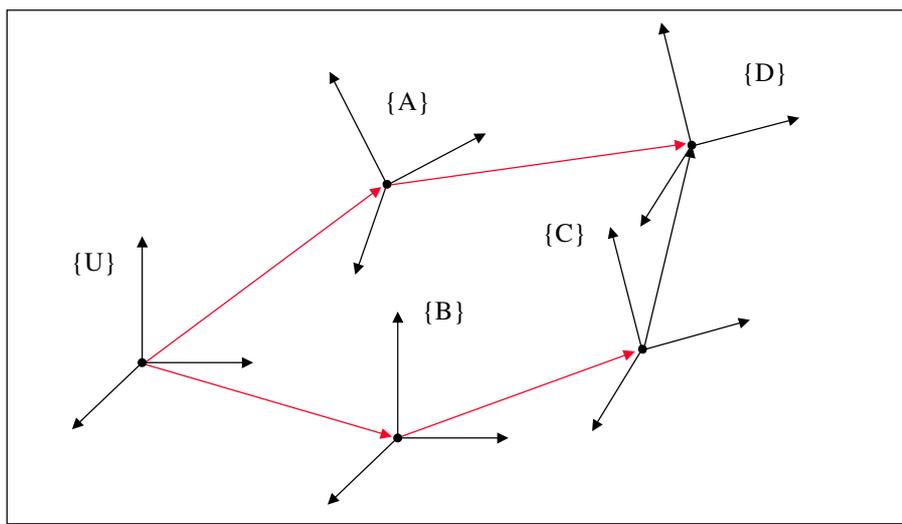
Logo, pode-se escrever:

$${}^B_A T = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^A_B R^T & & & -{}^A_B R^T A P_{Borg} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

E, como consequência:

$${}^B_A T = {}^A_B T^{-1}$$

Equações de transformações



Equação de Transformações

Da figura anterior temos que:

$${}^U_D T = {}^U_A T {}^A_D T$$

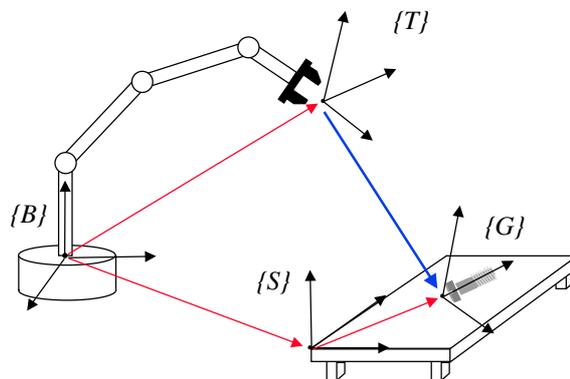
ou, também:

$${}^U_D T = {}^U_B T {}^B_C T {}^C_D T$$

igualando-se as duas expressões acima, tem-se:

$${}^U_A T {}^A_D T = {}^U_B T {}^B_C T {}^C_D T$$

Equação de Transformações



Representações de Orientação

- ◆ Matrizes de rotação:
 - Todas as colunas são mutuamente ortogonais;
 - Colunas possuem magnitude = 1;
 - Matrizes ortonormais próprias ($\det = +1$);É possível representar rotações em 3D com menos do que 9 parâmetros?

Representações de Orientação

- ◆ Formula de Cayley para matrizes ortonormais:
Para qualquer matriz ortonormal própria R , existe uma matriz S , uma matriz skew-symmetric, tal que:

$$R = (I_3 - S)^{-1} (I_3 + S)$$

Representações de Orientação

- ◆ Uma matriz *skew-symmetric* ($S = -S^T$) de dimensão 3 é especificada por 3 parâmetros (s_x, s_y, s_z):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

Como consequência, qualquer matriz de rotação 3×3 pode ser especificada apenas por 3 parâmetros.

Representações de Orientação

- ◆ Mais fácil visualizar translações.
- ◆ Mais difícil especificar e visualizar rotações.
- ◆ Rotações não são comutativas:

$${}^A R_C {}^B R_C \neq {}^B R_C {}^A R_B$$

Representações de Orientação

Exemplo:

$$R_z(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad R_x(30) = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix}$$

$$R_z(30)R_x(30) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.43 & 0.000 \\ 0.50 & 0.75 & -0.43 \\ 0.00 & 0.000 & 0.87 \end{bmatrix} \neq R_x(30)R_z(30) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.50 & 0.00 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 \\ 0.25 & 0.43 & 0.87 \end{bmatrix}$$

Representações de Orientações

- ◆ Convenções de conjuntos de ângulos: 24
 - Sequências de 3 rotações
 - 12 ângulos fixos
 - 12 ângulos de Euler
 - Dualidade reduz o número de parametrizações únicas para rotação para apenas 12.

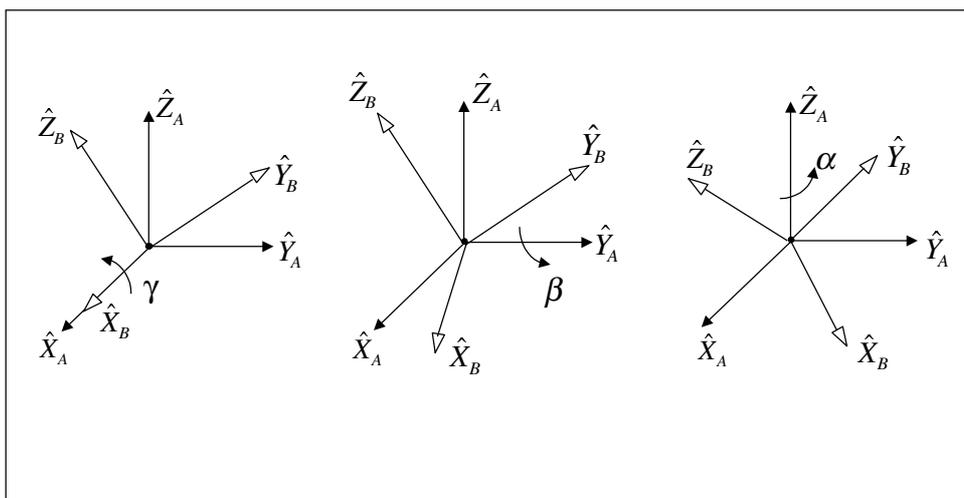
Ângulos Fixos X-Y-Z

◆ Ângulos Fixos X-Y-Z

Iniciar com o referencial {B} coincidente com um referencial conhecido {A}. Primeiramente, rotacione {B} em torno de X_A de um ângulo γ , rotacione, então, em torno de Y_A de um ângulo β , e finalmente rotacione em torno de Z_A de um ângulo α .

- ◆ Também conhecido como *roll, pitch e yaw*.

Ângulos Fixos X-Y-Z



Ângulos Fixos X-Y-Z

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

Ângulos Fixos X-Y-Z

- ◆ Problema inverso: 9 equações e 3 incógnitas.

$$\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Ângulos Fixos X-Y-Z

$$c\beta = \sqrt{r_{21}^2 + r_{21}^2}$$

$$\beta = \text{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{21}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\alpha = \text{Atan2}\left(\frac{r_{21}}{c\beta}, \frac{r_{11}}{c\beta}\right); \quad (\text{se } c\beta \neq 0)$$

$$\gamma = \text{Atan2}\left(\frac{r_{32}}{c\beta}, \frac{r_{33}}{c\beta}\right); \quad (\text{se } c\beta \neq 0)$$

Ângulos Fixos X-Y-Z

- ◆ *Atan2* (*y,x*) calcula $\tan^{-1}(y/x)$, mas utiliza o sinal de *x* e *y* para determinar o quadrante que contém o ângulo resultante.

Exemplo:

$$\text{Atan2}(-2.0, -2.0) = -135^\circ$$

$$\text{Atan2}(2.0, 2.0) = 45^\circ$$

Ângulos Fixos X-Y-Z

- ◆ Múltiplas soluções podem existir, nesse caso calcula-se o resultado de forma que $-90.0 \leq \beta \leq +90.0$
- ◆ Se $\beta = \pm 90.0^\circ$, a solução anterior degenera. Nesses casos, a diferença entre α e γ pode ser calculada. Assume-se que $\alpha = 0.0^\circ$.
Se $\beta = 90.0^\circ$ tem-se que:

$$\beta = 90.0^\circ; \alpha = 0.0^\circ; \gamma = \text{Atan2}(r_{12}, r_{22})$$

$$\text{Se } \beta = -90.0^\circ$$

$$\beta = -90.0^\circ; \alpha = 0.0^\circ; \gamma = -\text{Atan2}(r_{12}, r_{22})$$

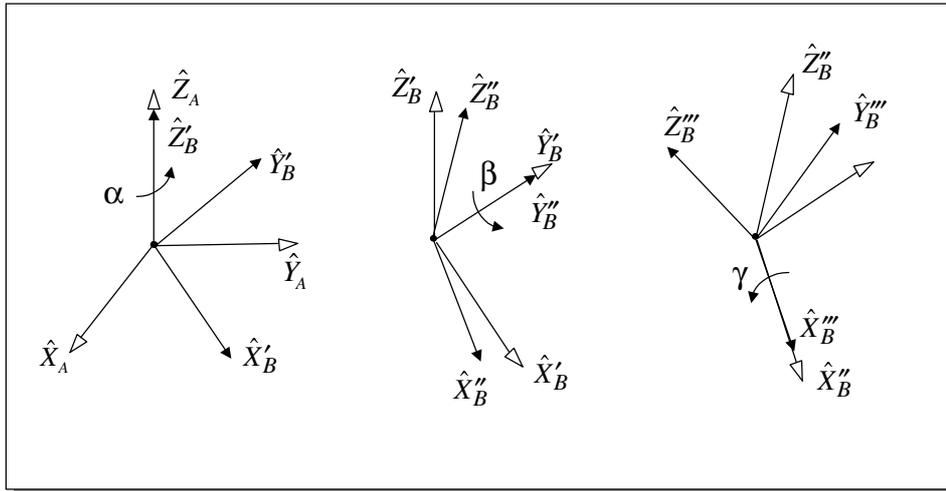
Ângulos de Euler Z-Y-X

- ◆ **Ângulos de Euler Z-Y-X**

Iniciar com o referencial {B} coincidente com um referencial conhecido {A}. Primeiramente, rotacione {B} em torno de Z_B de um ângulo α , rotacione, então, em torno de Y_B de um ângulo β , e finalmente rotacione em torno de X_B de um ângulo γ .

- ◆ Rotações realizadas em torno dos eixos do referencial móvel.

Ângulos de Euler Z-Y-X



©1998 Mario Campos

67

Ângulos de Euler Z-Y-X

$${}^A R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = {}^A R_{B'} R_{B''} R_{B'''} = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

©1998 Mario Campos

68

Ângulos de Euler Z-Y-X

- ◆ Três rotações em torno de ângulos fixos produzem a mesma orientação das mesmas três rotações realizadas em ordem oposta em torno dos eixos dos referenciais móveis.

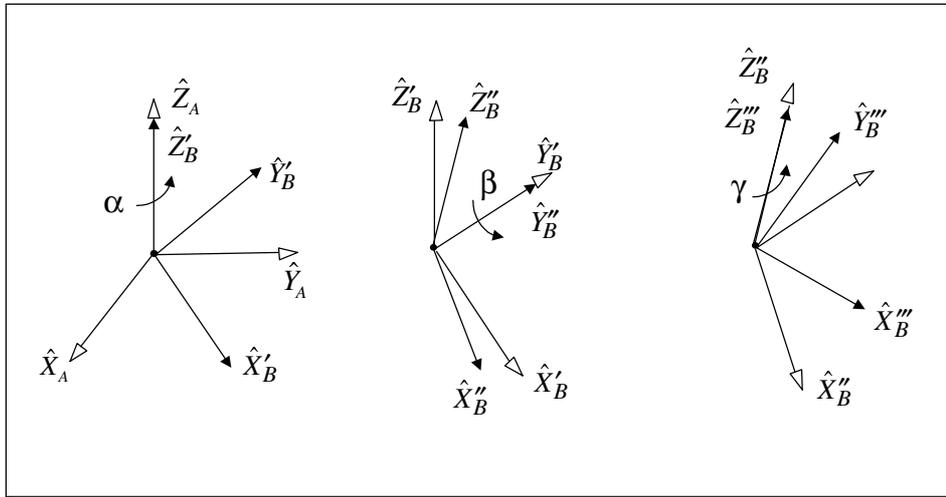
Ângulos de Euler Z-Y-Z

- ◆ **Ângulos de Euler Z-Y-Z**

Iniciar com o referencial $\{B\}$ coincidente com um referencial conhecido $\{A\}$. Primeiramente, rotacione $\{B\}$ em torno de Z_B de um ângulo α , rotacione, então, em torno de Y_B de um ângulo β , e finalmente rotacione em torno de Z_B de um ângulo γ .

- ◆ Rotações realizadas em torno dos eixos do referencial móvel.

Ângulos de Euler Z-Y-Z



©1998 Mario Campos

71

Ângulos de Euler Z-Y-Z

$${}^A_B R_{Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

©1998 Mario Campos

72

Ângulos de Euler Z-Y-Z

$${}^A_B R_{Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Se $s\beta \neq 0$

$$\beta = \text{Atan2}(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33})$$

$$\alpha = \text{Atan2}(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta)$$

$$\gamma = \text{Atan2}(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta)$$

Ângulos de Euler Z-Y-Z

- ◆ Múltiplas soluções podem existir, nesse caso calcula-se o resultado de forma que $0.0 \leq \beta \leq 180.0$
- ◆ Se $\beta = 0.0^\circ$ ou $\beta = 180.0^\circ$, a solução anterior degenera. Nesses casos, a diferença entre α e γ pode ser calculada. Assume-se que $\alpha = 0.0$.
Se $\beta = 0.0^\circ$ tem-se que:

$$\beta = 0.0^\circ; \alpha = 0.0^\circ; \gamma = \text{Atan2}(-r_{12}, r_{11})$$

Se $\beta = 180.0^\circ$ tem-se que:

$$\beta = 180.0^\circ; \alpha = 0.0^\circ; \gamma = \text{Atan2}(r_{12}, -r_{11})$$

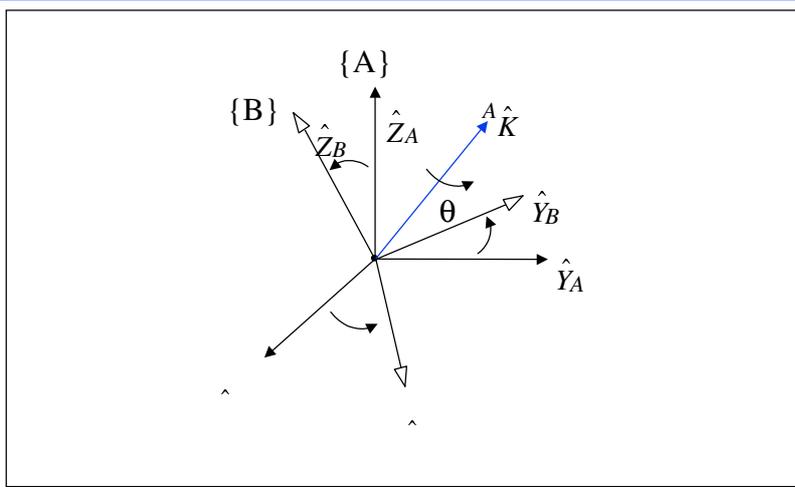
Ângulo-eixo Equivalentes

◆ Ângulo-eixo equivalente

Iniciar com o referencial {B} coincidente com um referencial conhecido {A}. Rotacione {B} em torno de um vetor ${}^A\hat{K}$ de um ângulo α , seguindo a regra da mão direita.

- ◆ Qualquer orientação pode ser descrita por meio de uma rotação em torno de um eixo genérico.

Ângulo-eixo Equivalentes



Ângulo-eixo Equivalentes

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y k_y v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z k_z v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

onde $v\theta = 1 - \cos\theta$ e ${}^A\hat{K} = [k_x \quad k_y \quad k_z]^T$

Ângulo-eixo Equivalentes

$${}_B R_K(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \text{Acoss} \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right); \quad \hat{K} = \frac{1}{2 \text{sen } \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Ângulo-eixo Equivalentes

◆ Problemas:

- A solução anterior calcula o valor de θ entre 0 e 180 graus.
- Existe um outro par, $(-{}^A\hat{K}, -\theta)$ que resulta na mesma orientação no espaço.
- Pequenas rotações angulares resultarão em um eixo “mal-definido”. No limite, quando a rotação tende para zero, o eixo de rotação se torna indefinido. A solução anterior falha para $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 180^\circ$.

Ângulo-eixo Equivalentes

- ### ◆ Exemplo: Referencial {B} inicialmente coincidente com {A}. Rotacione {B} em torno do vetor ${}^A\hat{K} = [0.707 \ 0.707 \ 0.0]^T$ (passando pela origem), de um ângulo $\theta = 30^\circ$. Qual a descrição do referencial {B}?

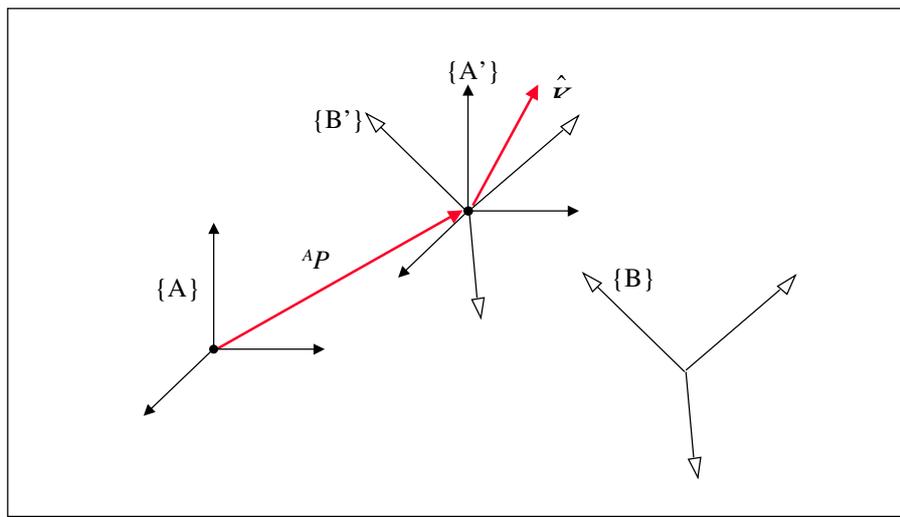
$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Ângulo-eixo Equivalentes

◆ Exemplo: Referencial {B} inicialmente coincidente com {A}. Rotacione {B} de um ângulo $\theta = 30^\circ$ em torno do vetor ${}^A\hat{K} = [0.707 \ 0.707 \ 0.0]^T$, passando pelo ponto ${}^A P = [1.0 \ 2.0 \ 3.0]^T$. Qual a descrição do referencial {B}?

Definem-se, dois referenciais intermediários {A'} e {B'}, com a mesma orientação de {A} e {B}, mas transladados em relação a {A} de um “off-set” que coloca as duas origens no eixo de rotação.

Ângulo-eixo Equivalentes



Ângulo-eixo Equivalentes

Temos, a seguir, {A'} relativo a {A} e {B} relativo a {B'}:

$${}_{A'}^A T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad {}_{B'}^B T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Ângulo-eixo Equivalentes

– Pode-se, agora, rotacionar {B'} relativo a {A'}, em torno de um eixo que passa pela origem, sabendo-se que não houve translação:

$${}_{B'}^{A'} T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Ângulo-eixo Equivalentes

Finalmente, pode-se escrever a equação que calcula a transformação que descreve o referencial {B} em relação ao referencial {A}:

$${}^A_B T = {}^A_{A'} T {}^{A'}_{B'} T {}^{B'}_B T$$

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.05 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Parâmetros de Euler

- ◆ Uma outra representação de orientação. Em termos do eixo equivalente $\hat{K} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$ e do ângulo equivalente θ , os parâmetros de Euler são dados por:

$$\varepsilon_1 = k_x \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$\varepsilon_2 = k_y \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$\varepsilon_3 = k_z \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$\varepsilon_4 = \cos \frac{\theta}{2}$$

Parâmetros de Euler

- ◆ As quatro quantidades não são independentes, mas pode-se escrever que:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = 1$$

que pode ser visualizado como uma hiper-esfera unitária no espaço quadri-dimensional.

- ◆ Visto como um vetor 4×1 , os parâmetros de Euler são conhecidos como **quatérnios unitários**

Parâmetros de Euler

- ◆ A matriz de rotação R_{ε} , equivalente ao conjunto de ângulos de Euler é dada por:

$$R_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_4) & 1 - 2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_4) & 1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_4^2 \end{bmatrix}$$

Parâmetros de Euler

- ◆ Dada uma matriz de rotação, os parâmetros de Euler equivalentes são dados por:

$$\varepsilon_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4\varepsilon_4} ; \varepsilon_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4\varepsilon_4}$$

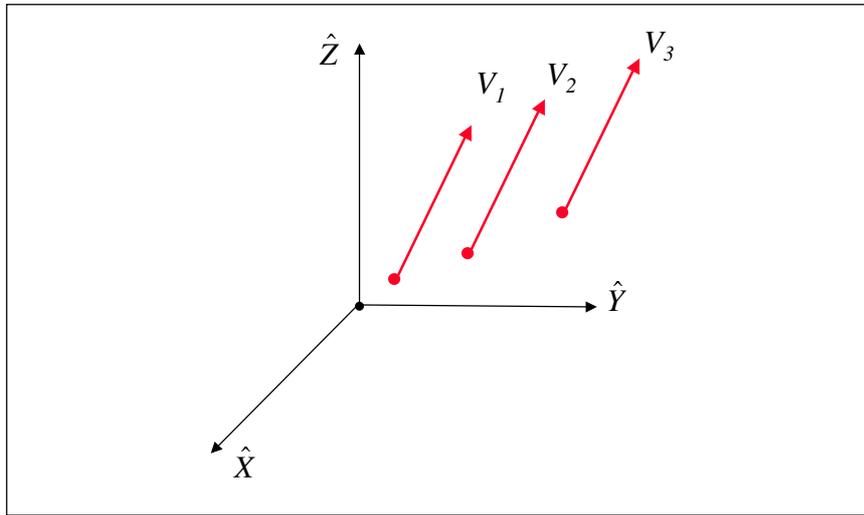
$$\varepsilon_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4\varepsilon_4} ; \varepsilon_4 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}$$

- ◆ Não é muito útil, computacionalmente falando, se representar rotações de 180° ($\varepsilon_4 = 0$).
- ◆ Todos os ε_i permanecem no intervalo $[-1,1]$.

Transformação de Vetores Livres

- ◆ Vetores como velocidade e força serão transformados de maneira diferente.
- ◆ Dois vetores são *iguais*, se tiverem a mesma *dimensão, magnitude e direção*. Podem, no entanto, possuir diferentes *linhas de ação*, como mostrado na figura a seguir.
- ◆ Dois vetores são *equivalentes* segundo certa capacidade, quando produzem o *mesmo efeito* nessa capacidade.

Transformação de Vetores Livres



Transformação de Vetores Livres

- ◆ Um ***vetor de linha*** refere-se a um vetor que, juntamente com a magnitude e direção, é dependente de sua ***linha de ação***, no tocante a definição de seu efeito.
- ◆ Um ***vetor livre*** refere-se a um vetor que pode ser posicionado em qualquer lugar do espaço sem perda ou mudança em seu significado, enquanto sua magnitude e direção forem preservadas.

Transformação de Vetores Livres

- ◆ Um vetor de momento é sempre um vetor livre. Se tivermos um vetor de momento ${}^B N$, pode-se calcular esse mesmo vetor em termos do referencial $\{A\}$:

$${}^A N = {}^A_B R {}^B N$$

ou seja, apenas a matriz de rotação é necessária para mapeá-lo.

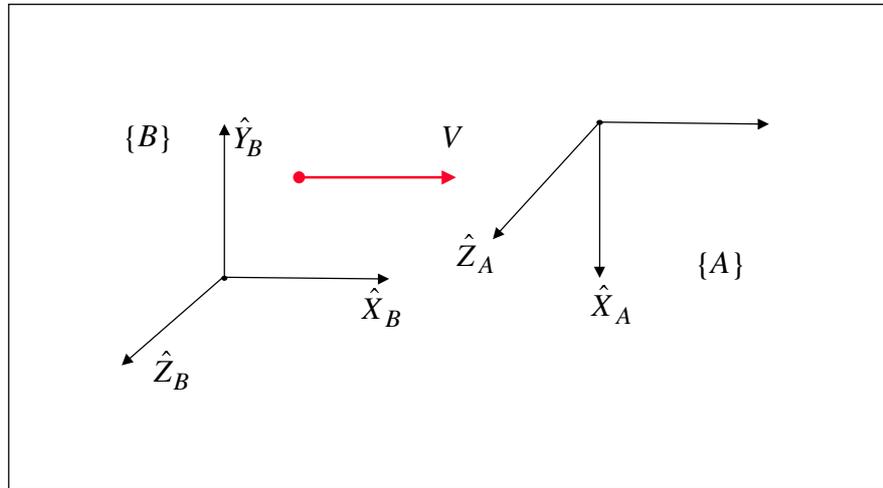
Transformação de Vetores Livres

- ◆ Da mesma maneira, o vetor velocidade descrito em relação a $\{B\}$, ${}^B V$, pode ser descrito em relação a $\{A\}$ como:

$${}^A V = {}^A_B R {}^B V$$

- ◆ A velocidade de um ponto é um vetor livre. Na figura a seguir, se R é o eixo de rotação, então A é o ponto.

Transformação de Vetores Livres



©1998 Mario Campos

95

Considerações Computacionais

- ◆ A *ordem* em que as transformações são aplicadas faz grande diferença em termos da computação necessária. Por exemplo, existem duas possibilidades básicas de se perfazer múltiplas rotações no vetor de posição ${}^A P$:

$$A \rightsquigarrow A \rightsquigarrow B \rightsquigarrow C \rightsquigarrow D \rightsquigarrow$$

©1998 Mario Campos

96

Considerações Computacionais

- ◆ Multiplicar as três matrizes de rotação, e depois multiplicar pelo vetor:

$${}^A_D R = {}^A_B R {}^B_C R {}^C_D R$$

$${}^A P = {}^A_D R {}^D P$$

- ◆ Calcular ${}^A_D R$ requer 54 multiplicações e 36 adições, e a multiplicação final pelo vetor requer mais 9 multiplicações e 6 adições, perfazendo um total de 63 multiplicações e 42 adições.

Considerações Computacionais

- ◆ Se multiplicarmos o vetor pelas matrizes, uma a uma:

$${}^A P = {}^A_B R {}^B_C R {}^C_D R {}^D P$$

$${}^A P = {}^A_B R {}^B C R P$$

$${}^A P = {}^A_B R P$$

$${}^A P = A P$$

teremos um total de 27 multiplicações e 18 adições, menos da metade, se comparado com o método anterior.

Considerações Computacionais

- ◆ Em alguns casos podem existir inúmeros ${}^D P_i$ que serão transformados em ${}^A P_i$. Neste caso será mais eficiente calcular-se ${}^A R$ apenas uma vez e utilizá-lo nos mapeamentos posteriores.

Considerações Computacionais

- ◆ Um método mais eficiente de se calcular o produto de duas matrizes de rotação ~~ACOM~~ menos de 27 multiplicações e 18 adições. Onde \hat{C}_i são as colunas de \hat{C} , e B_i são as colunas da matriz resultado.

$$\hat{C}_1 = {}^A B R \hat{L}_1,$$

$$\hat{C}_2 = {}^A B R \hat{L}_2,$$

$$\hat{C}_3 = \hat{C}_1 \times \hat{C}_2$$

requerendo 24 multiplicações e 15 adições.